Intégrales

Un bref résumé avec exemples et exercices

October 25, 2013

1.1 Intégrales des fonctions connues

Juste en utilisant le fait que intégrale et dérivée sont opérations inverses on déduit les primitives suivantes:

$$\int (x+a)^n \mathrm{d}x = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1} \quad (n \geq 0); \quad \int \frac{1}{(x+a)^n}\mathrm{d}x = -\frac{1}{(n-1)(x+a)^{n-1}} \quad (n \geq 2);$$

$$\int \frac{1}{x+a}\mathrm{d}x = \ln|x+a|; \quad \int e^{ax+b}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b}; \quad \int \sin(ax+b)\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax+b);$$

$$\int \cos(ax+b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax+b); \quad \int \frac{1}{x^2+a}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\Big(\frac{x}{\sqrt{a}}\Big) \quad (a>0).$$

Rappelez que, une fois qu'on a trouvé une primitive, on peut calculer aisément toutes intégrales définies. Par exemple:

$$\int_0^1 \frac{1}{x-2}\mathrm{d}x = \big[\ln|x-2|\big]_0^1 = \ln|1-2| - \ln|0-2| = \ln(1) - \ln(2) = -\ln 2$$

1.1.1 Exercices

En utilisant les règles ci-dessus, avec les règles bien connues $\int (f(x)+g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$ et $\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda \int f(x)\mathrm{d}x$, calculer:

$$\int (3x+6)^{10}\mathrm{d}x; \quad \int \frac{1}{5x+5}\mathrm{d}x; \quad \int 6e^{\frac{2x+3}{5}}\mathrm{d}x; \quad \int_0^{\pi} \Big(\cos(2x) + 3\sin\big(4x+\frac{\pi}{2}\big)\Big)\mathrm{d}x; \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{4x^2+16}\mathrm{d}x$$

(la notation $\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$, qui ne sera plus utilisée dans le cours / CC / examen, signifie qu'on demande $\lim_{x\to\infty} F(x) - F(0)$, où F est une primitive de f, comme d'habitude).

1.2 Intégration par partie

En intégrant la formule de Leibnitz, on obtient:

$$\int_a^b f'(x)g(x) = \big[f(x)g(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x). \tag{1}$$

On peut utiliser cette formule pour calculer des intégrales: l'idée est d'écrire l'intégrande comme produit de deux fonctions, dont une devient plus "simple" après dérivation (par exemple: $\log(x)$, $\tan(x)$ où x^n avec $n \geq 1$) et l'autre ne devient pas trop plus difficile après intégration (par exemple, e^x, $\sin(x)$, $\cos(x)$ où x^n avec $n \neq -1$). Dans les cas qui nous intéressent, l'intégration par partie sera toujours utilisée soit pour éliminer un log ou un arctan, soit pour éliminer un polynôme s'il est multiplié par un exponentiel ou une fonction trigonométrique simple. Voyons tout d'abord des exemples où on élimine log ou arctan (dans les notations de (1), on aura soit $g(x) = \ln(x)$ soit $g(x) = \arctan(x)$, et $f'(x)$ ce qui reste):

$$\begin{aligned}\int_a^b x^2\ln(x)\mathrm{d}x &= \Big[\frac{x^3}{3}\ln(x)\Big]_a^b - \int_a^b \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \Big(\frac{b^3}{3}\ln(b) - \frac{a^3}{3}\ln(a)\Big) - \int_a^b \frac{x^2}{3}\mathrm{d}x \\ &= \Big(\frac{b^3}{3}\ln(b) - \frac{a^3}{3}\ln(a)\Big) - \Big[\frac{x^3}{9}\Big]_a^b = \frac{b^3}{3}\ln(b) - \frac{a^3}{3}\ln(a) - \frac{b^3}{9} + \frac{a^3}{9}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b \arctan(x)\mathrm{d}x &= \big[x\arctan(x)\big]_a^b - \int_a^b x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \big(b\arctan(b) - a\arctan(a)\big) - \frac{1}{2}\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \big(b\arctan(b) - a\arctan(a)\big) - \frac{1}{2}\big[\ln|1+x^2|\big]_a^b\\ &= b\arctan(b) - a\arctan(a) - \frac{1}{2}\ln|1+b^2| + \frac{1}{2}\ln|1+a^2|.\end{aligned}$$

Dans le deuxième cas, on a choisit comme $f'(x)$ la fonction "cachée" $f'(x) = 1$, donc, par exemple, $f(x) = x$. Dans les deux cas, on a exprimé l'intégrale entre a et b pour raisons de clarté, mais les mêmes calculs donnent les primitives: une primitive de $x^2\ln(x)$ est donc $\frac{x^3}{3}\ln(x) - \frac{x^3}{9}$, et une primitive de $\arctan(x)$ est $x\arctan(x) - \ln|1+x^2|$.

Voilà maintenant des exemples de la deuxième utilisation de l'intégration par partie, pour éliminer les polynômes quand ils sont avec des fonctions faciles à intégrer:

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^{-x}\mathrm{d}x &= \big[-xe^{-x}\big]_a^b - \int_a^b (-e^{-x})\mathrm{d}x = -be^{-b} + ae^{-a} + \int_a^b e^{-x}\mathrm{d}x\\ &= -be^{-b} + ae^{-a} + [-e^{-x}]_a^b = -be^{-b} + ae^{-a} - e^{-b} + e^{-a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_a^b (x^2+1)\sin(2x)\mathrm{d}x &= \Big[-\frac{1}{2}(x^2+1)\cos(2x)\Big]_a^b - \int_a^b \Big(-\frac{1}{2}\cdot 2x\cos(2x)\Big)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}(b^2+1)\cos(2b) + \frac{1}{2}(a^2+1)\cos(2a) + \int_a^b x\cos(2x)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}(b^2+1)\cos(2b) + \frac{1}{2}(a^2+1)\cos(2a) + \Big[\frac{1}{2}x\sin(2x)\Big]_a^b - \frac{1}{2}\int_a^b \sin(2x)\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}(b^2+1)\cos(2b) + \frac{1}{2}(a^2+1)\cos(2a) + \frac{1}{2}b\sin(2b) - \frac{1}{2}a\sin(2a) - \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{2}\cos(2x)\Big]_a^b\\ &= -\frac{1}{2}(b^2+1)\cos(2b) + \frac{1}{2}(a^2+1)\cos(2a) + \frac{1}{2}b\sin(2b) - \frac{1}{2}a\sin(2a)\\ &\quad + \frac{1}{4}\cos(2b) - \frac{1}{4}\cos(2a).\end{aligned}$$

Notez que dans le deuxième exemple on a appliqué l'intégration par partie deux fois. D'une règle générale, si on veut effacer un polynôme de degré n, il faut faire n intégrations par partie. Et n'oubliez pas les signes qui changent à chaque fois!

1.2.1 Exercices

En utilisant l'intégration par partie, calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^3 \ln(x)\mathrm{d}x; \quad \int_0^2 x^5\ln(x)\mathrm{d}x; \quad \int_0^1 (x+1)^2e^{2x}\mathrm{d}x; \quad \int_0^\pi (x^2+x+1)\cos(x+2)\mathrm{d}x.$$

1.3 Intégration par changement de variables (dit aussi par substitution)

La formule qu'il faut rappeler est:

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u.$$

Il y a quelque chose de caché qui est à expliquer: premièrement, la lettre u est utilisée à gauche comme fonction et à droite comme variable. Ceci peut générer un peu de confusion, mais il est intentionnel pour mieux rappeler ce que chaque terme signifie. D'une façon abrégée, on écrit normalement

$$\mathrm{d}u = u'(x)\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

(cette règle est une des raisons pour la notation $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$, on peut "simplifier" le $\mathrm{d}x$ - chose que n'a pas d'autre sens que pour se rappeler la règle, bien entendu!). Deuxièmement, vu qu'on ne demande pas à u d'être croissante, il peut bien se passer que $u(a) > u(b)$. Dans ce cas là il faut se rappeler que par définition $\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\mathrm{d}u = -\int_{u(b)}^{u(a)} f(u)\mathrm{d}u$.

Vu que l'énoncé est un peu difficile à comprendre, voyons quelques exemples. La première utilisation de cette formule est pour intégrer des fonctions que on pourrait reconnaitre comme dérivées de fonctions composées, mais sans se tromper en problèmes de constantes, etc.. Par exemple:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(\pi + 3x^2)\mathrm{d}x.$$

On pourrait, peut-être, reconnaitre la dérivée de $\cos(\pi+3x^2)$, à constante multiplicative près. Par contre, il n'est pas toujours aussi simple de le reconnaitre, et il est toujours facile de se tromper en suivant cette idée. Donc on substitue $u(x) = \pi + 3x^2$. On calcule d'abord: $\mathrm{d}u = 6x\mathrm{d}x$, car $u'(x) = 6x$, et les extrêmes d'intégration: $u(0) = \pi$, $u(\sqrt{\pi}) = 4\pi$. Donc l'intégrale devient:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} 2x\sin(\pi+3x^2)\mathrm{d}x = \int_\pi^{4\pi} 2x\sin u\frac{\mathrm{d}u}{6x} = \int_\pi^{4\pi} \frac{1}{3}\sin u\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\big[\cos(u)\big]_\pi^{4\pi} = -\frac{1}{3}(\cos(4\pi)-\cos(\pi)) = -\frac{2}{3}.$$

Ici, il faut noter un peu de choses. Tout d'abord, on a écrit au deuxième passage une équation où paraissent u et x au même temps. Cela ne gène pas, parce que la x se simplifie tout de suite. S'il restait une x, soit on s'était trompé, soit la substitution n'était pas la bonne (quand la substitution n'est pas entièrement évident il vous sera donnée, pour éviter cette deuxième possibilité). Deuxièmement, la raison de la substitution est simple: on a à l'intérieur d'une fonction qu'on sait intégrer (sin dans ce cas) une expression compliquée ($\pi + 3x^2$). On appelle cette expression u, et on espère que tout marche bien après substitution. Enfin, ce qu'on a fait marche bien pour l'intégrale définie. Si on veut une primitive, on n'aura pas la difficulté de calculer les nouveaux extrêmes d'intégration, mais par contre il faudra se rappeler de substituer l'ancien $u(x)$ dans le résultat. Donc pour calculer la primitive de $2x\sin(\pi + 3x^2)$, on obtient:

$$\int 2x\sin(\pi + 3x^2)\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3}\sin(u)\mathrm{d}u = -\frac{1}{3}\cos(u) = -\frac{1}{3}\cos(\pi + 3x^2).$$

Avec le même raisonnement, on obtient les exemples suivants:

$$\int_a^b 9xe^{5-3x^2}\mathrm{d}x = \int_{5-3a^2}^{5-3b^2} 9xe^u\frac{\mathrm{d}u}{-6x} = -\int_{5-3a^2}^{5-3b^2} \frac{3}{2}e^u\mathrm{d}u = -\frac{3}{2}\left[e^u\right]_{5-3a^2}^{5-3b^2} = -\frac{3}{2}e^{5-3b^2} + \frac{3}{2}e^{5-3a^2}.$$

$$\int_0^1 \frac{5x^3}{1+16x^4}\mathrm{d}x = \int_1^{17} \frac{5x^3}{u}\frac{\mathrm{d}u}{64x^3} = \int_1^{17} \frac{5}{64}\frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{5}{64}\big[\ln|x|\big]_1^{17} = \frac{5}{64}\ln|17| - \frac{5}{64}\ln|1| = \frac{5}{64}\ln 17$$

Dans le premier cas, $u(x) = 5 - 3x^2$, donc $\mathrm{d}u = -6x\mathrm{d}x$, et dans le deuxième $u(x) = 1 + 16x^4$, et donc $\mathrm{d}u = 64x^3\mathrm{d}x$.

Dans tous les cas listés on a utilisé l'intégration par changement pour commodité; en effet, on aurait pu à chaque fois noter directement qu'il s'agit d'intégrer la dérivée d'une fonction composée, et donc deviner la réponse sans aucun changement de variable. Toutefois, le changement de variable est un instrument très puissant qui s'applique dans des cas différents. Voyons quelques exemples de cela:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\mathrm{d}x$$

Ici, la technique usuelle de substituer la "chose la plus difficile" ne marche pas, parce que si on posait $u = 1 - \cos^2 x$ on aurait besoin d'un $\sin x\cos x$ au numérateur. Essayons avec $u(x) = \cos x$ (ne vous enquietez pas, si un exercice similaire est donné dans un examen, sans doute la $u(x)$ va être suggérée!), et donc $u'(x) = -\sin x \neq 0$ sur $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$. Il faut, dans ce cas, écrire cette $u'(x)$ comme fonction de $u(x)$, car on veut exprimer tous termes de la nouvelle intégrale en termes de u. Donc: $u'(x) = -\sin(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)} = -\sqrt{1-u^2}$, c'est-à-dire, $\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$. Vu que $u(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ et $u(\frac{\pi}{2}) = 0$, on obtient:

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\mathrm{d}x = -\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u.$$

Ceci est maintenant une fonction rationnelle qui peut être intégrée avec les techniques du prochaine chapitre. Anticipons ce qu'on va voire, en notant que $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\big(-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{1+u}\big)$, et donc

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(-\frac{1}{u-1} + \frac{1}{1+u}\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\big[-\ln|u-1| + \ln|1+u|\big]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{1}{2}\Big(-\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{3}{2} + \ln 1 - \ln 1\Big) = \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3 - \ln 2) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Pour conclure, voyons comme une utilisation très utile de l'intégration par changement de variable s'effectue "à l'envers", c'est-à-dire en spécifiant x comme fonction de u, et pas la réciproque:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

Encore une fois, les méthodes usuelles ne marchent pas. La substitution intelligent est donné "à l'envers" $x = \sin u$; donc $\mathrm{d}x = \cos u\mathrm{d}u$, et ici il faut être plus attentifs sur les extrêmes d'intégration: si $x = 0$, alors $u = 0$ car $\sin 0 = 0$, et si $x = 1$ alors $u = \frac{\pi}{2}$ car $\sin\frac{\pi}{2} = 1$. On obtient:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \mathrm{d}u,$$

en utilisant la règle usuelle $\sqrt{1-\sin^2 x} = \cos x$, qui vient de $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Nous verrons comment calculer la dernière intégrale dans le chapitre 1.5, et le résultat sera $\frac{\pi}{4}$. Si vous faites un dessins de la fonction que l'on vient d'intégrer, vous verrez qu'il s'agit de rien d'autre que la partie du cercle dans le premier quadrant. On vient donc de montre que l'aire du cercle unité est π!

1.3.1 Exercices

Effectuer le changement de variable pour calculer les intégrales suivantes. La fonction est proposée quand il ne s'agit pas tout simplement de prendre la "partie plus difficile"...

$$\int_0^1 x^2(x^3+1)^{100}\mathrm{d}x; \quad \int_{-1}^1 x^3(x^4+2)^2((x^4+2)^3+1)^4\mathrm{d}x; \quad \int_1^e \frac{\sin(\log x)}{x}\mathrm{d}x;$$

$$\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\mathrm{d}x \text{ (tout d'abord } u = e^{2x}, \text{ puis } v = u+1); \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x \ (u(x) = \tan x)$$

Le dernier exercice est un peu plus difficile de ce qu'on vous demande normalement, le problème n'étant pas le changement de variable, mais travailler un peu après pour exprimer ce qu'on obtient en terme de u uniquement.

1.4 Intégration des fonctions rationnelles

Les fonctions rationnelles sont des rapports des polynômes. L'idée est qu'on peut toujours intégrer des fonctions de ce type, avec un peu de travail. Les formules générales étant compliquées, on verra ici les exemples les plus fréquents. Il y a deux archétypes (on écrira pour brièveté les primitives uniquement):

$$\int \frac{1}{x-a}\mathrm{d}x = \ln|x-a|; \quad \int \frac{1}{a+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan\frac{x}{\sqrt{a}} \ (a > 0). \tag{2}$$

Le point est toujours de se ramener à des sommes de fonctions de ce type (ou, pour généraliser le premier type, du type $\int \frac{P'(x)}{P(x)}\mathrm{d}x = \ln|P(x)|$, où P est un polynôme). Le cas plus simple est si le dénominateur peut s'écrire comme produit de termes de degré un tous différents entre eux, et de plus le degré su numérateur est strictement plus petit que le degré du dénominateur. Voyons un exemple:

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x.$$

Ici, le dénominateur s'écrit comme produit $(x-2)(x-3)$ (il suffit de voir que les racines du polynôme sont 2 et 3, mais cette décomposition est normalement donnée déjà par le texte de l'exercice) et le degré du numérateur, qui est 1, est strictement inférieur à celui du dénominateur, qui est 2. Donc on peut toujours écrire

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-3} = \frac{a(x-3)+b(x-2)}{x^2-5x+6} = \frac{(a+b)x-3a-2b}{x^2-5x+6}.$$

Pour trouver a et b on demande l'égalité entre les coefficients de chaque degré:

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a-2b=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1-b \\ 3-3b-2b=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-\frac{2}{5} \\ b=\frac{7}{5} \end{cases}$$

Donc $\frac{x-4}{x^2-5x+6} = -\frac{2}{5}\frac{1}{x-2} + \frac{7}{5}\frac{1}{x-3}$, et

$$\int \frac{x-4}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x = \int \Big(-\frac{2}{5}\frac{1}{x-2} + \frac{7}{5}\frac{1}{x-3}\Big)\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\ln|x-2| + \frac{7}{5}\ln|x-3|.$$

Le cas suivant est tout à fait similaire: il s'agit d'une fonction rationnelle où le dénominateur s'écrive toujours comme produit de termes linéaires, mais le numérateur à un degré plus grand de ou égal à celui du dénominateur. Dans ce cas on doit faire la même chose que ci-dessus, simplement en ajoutant un polynôme de degré la différence des degrés du numérateur et du dénominateur:

$$\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+3}\mathrm{d}x \rightsquigarrow \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+3} = P(x) + \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3},$$

car $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Or, le degré du numérateur est 3, celui du dénominateur est 2, donc $P(x)$ doit être un polynôme de degré $3-2=1$, c'est-à-dire ils existent deux réels c, d tels que $P(x) = cx+d$. Encore une fois, on écrit tout comme une seule fraction, et on demande l'égalité terme à terme:

$$\begin{aligned} cx+d+\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+3} &= \frac{(cx+d)(x^2+4x+3)+a(x+3)+b(x+1)}{x^2+4x+3} \\ &= \frac{cx^3+dx^2+(3c+4d+a+b)x+3d+3a+b}{x^2+4a+3} = \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+3} \end{aligned}$$

Donc on obtient le système:

$$\begin{cases} c=1 \\ d=0 \\ 3c+4d+a+b=3 \\ 3d+3a+b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} c=1 \\ d=0 \\ a+b=0 \\ 3a+b=2 \end{cases} \iff \begin{cases} c=1 \\ d=0 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases}$$

et grâce à cela on peut écrire:

$$\int \frac{x^3+3x+2}{x^2+4x+3} = \int \Big(x+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\Big)\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + \ln|x+1| - \ln|x+3|.$$

Ici il faut noter que les degrés du numérateur et du dénominateur peuvent bien être égaux. Dans ce cas, $P(x)$ sera un polynôme de degré 0, c'est-à-dire, une constante, mais il ne faut pas l'oublié! De plus, les calculs peuvent devenir lourds. Dans ce cas, il peut bien être que l'exercice vous demandera d'effectuer seulement une partie du calcul, par exemple en vous donnant déjà une forme d'écriture et lassant au plus deux ou trois constantes à déterminer.

Il faut maintenant passer aux dernier exemples. Il se passe que pas tout le polynôme de degré 2 peuvent s'écrire comme produit de polynômes de degré 1: vous savez bien que cela est possible uniquement si le discriminant est non-négatif! Qu'est-ce qu'il se passe dans ce cas? On obtiendra sans doute une arctan, peut-être sommée a quelque chose d'autre. Les cas plus simple est si le numérateur est une constante:

$$\int \frac{3}{x^2+4x+10}\mathrm{d}x$$

Le discriminant du dénominateur est $16-40=-24<0$, donc il n'y a aucune possibilité de procéder comme ci-dessus. Il faut trouver une arctangente: pour cela, on "complète le carré" pour éliminer le terme de degré 1:

$$\frac{3}{x^2+4x+10} = \frac{3}{x^2+4x+4+6} = \frac{3}{(x+2)^2+6}$$

Avec un simple changement de variable $u(x) = x + 2$ (pour lequel $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$), on arrive à une intégrale qu'on sait faire (cfr. (2)):

$$\int \frac{3}{x^2+4x+10}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{(x+2)^2+6}\mathrm{d}x = \int \frac{3}{u^2+6}\mathrm{d}u = \frac{3}{\sqrt{6}}\arctan\frac{u}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}\arctan\Big(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\Big).$$

Dans le cas où le numérateur a degré 1, il faut un peu de travail de plus: il faut isoler une partie qui sera un multiple de la dérivée du dénominateur, et puis procéder comme ci-dessus. Par exemple:

$$\int \frac{x+3}{x^2-6x+15}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6+12}{x^2-6x+15}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x-6}{x^2-6x+15}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{12}{x^2-6x+15}\mathrm{d}x$$

Le premier terme s'intègre en $\frac{1}{2}\ln|x^2-6x+15|$, et pour le deuxième terme on continue comme au point qui précède:

$$\frac{1}{2}\int \frac{12}{x^2-6x+15}\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{(x-3)^2+6}\mathrm{d}x = 6\int \frac{1}{u^2+6}\mathrm{d}u = \frac{6}{\sqrt{6}}\arctan\frac{u}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\arctan\Big(\frac{x-3}{\sqrt{6}}\Big)$$

Naturellement, on pourrait bien avoir des exemples un peut plus compliqués, où il faut combiner les deux méthodes, si par exemple le degré du dénominateur est 3 ou plus, mais on espère de n'avoir pas à faire des calculs aussi lourds... La seule chose à rappeler est que si on veut écrire une fraction comme somme de fractions, les numérateur à chercher peuvent être n'importe quoi de degré strictement plus petit de celui du dénominateur. Voici quelques exemple déjà résolu:

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2+6x+9}{(x+1)(x^2+2x+5)}\mathrm{d}x &= \int \Big(\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2+2x+5}\Big)\mathrm{d}x = \cdots = \int \Big(\frac{1}{x+1}+\frac{x+3}{x^2+2x+5}\Big)\mathrm{d}x \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{2}{(x+1)^2+3}\mathrm{d}x \\ &= \ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3+x^2-5x+11}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x &= \int \Big(ax+b+\frac{cx+d}{x^2-2x+2}\Big)\mathrm{d}x = \ldots = \int \Big(2x+5+\frac{x+1}{x^2-2x+2}\Big)\mathrm{d}x \\ &= x^2+5x+\frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{4}{(x-1)^2+1}\mathrm{d}x \\ &= x^2+5x+\frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2| + 2\arctan(x-1)\end{aligned}$$

Dans les deux cas, le $\cdots$ signifie qu'on résoudre le système linéaire pour trouver a, b, c, d comme fait plus haut.

1.4.1 Exercices

$$\int \frac{x+1}{x^2-5x+4}\mathrm{d}x;\ \int_0^2 \frac{x^2+3x+1}{x^2+2x-3};\ \int \frac{x+1}{x^2+4x+16};\int \frac{x^2+x+1}{x^2-2x+5}\mathrm{d}x$$

(il faut écrire le premier comme $\frac{a}{x-1}+\frac{b}{x-4}$, le deuxième comme $a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x+3}$, le troisième comme $\frac{1}{2}\frac{2x+4}{x^2+4x+16}+\frac{1}{2}\frac{a}{x^2+4x+16}$ et le quatrième comme $a+\frac{bx+c}{x^2-2x+5}$ (et puis procéder en isolant la dérivée du dénominateur du terme constant).

1.5 Intégration des polynômes trigonométriques

Les polynômes en sinus et cosinus s'intègrent très aisément. Une telle intégrale est somme d'intégrales du type $\int \sin^n x\cos^m x\mathrm{d}x$. Il n'y a que deux cas: soit n et m sont tout le deux pairs, soit il y a au moins un impair. Dans ce dernier cas, par exemple si $n = 2k+1$ est impair, on écrit:

$$\int \sin^{2k+1} x\cos^m x\mathrm{d}x = \int \sin x(\sin^2 x)^k\cos^m x\mathrm{d}x = \int \sin x(1-\cos^2 x)^k\cos^m x\mathrm{d}x$$

Pour conclure il suffit de faire le produit et utiliser la dérivée d'une puissance. Prenons $n = 5$ et $m = 4$ pour être plus concrets:

$$\int \sin^5 x \cos^4 x \mathrm{d}x = \int \sin x (1 - \cos^2 x)^2 \cos^4 x \mathrm{d}x = \int \sin x (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cos^4 x \mathrm{d}x =$$
$$= \int \sin x \cos^4 x \mathrm{d}x - 2 \int \sin x \cos^6 x \mathrm{d}x + \int \sin x \cos^8 x \mathrm{d}x = \frac{\cos^5 x}{5} - 2\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9}.$$

La même méthode marche aussi bien que cela si n est pair et m impair: on exprimera les termes $\cos^2 x$ comme $1 - \sin^2 x$, et on obtiendra un polynôme en $\sin x$ multiplié par $\cos x$, qui on sait intégrer. Par contre, cette méthode ne marche pas si n et m sont tout le deux pairs. Commençons par voir comment faire l'intégral de $\cos^2 x$, qui était déjà cité plus haut. Il suffit de se rappeler l'écriture de $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$:

$$\int \cos^2 x \mathrm{d}x = \int \big(\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos^2 x\big)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (\cos^2 x + 1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 - \cos(2x))\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x).$$

On peut donc calculer l'intégrale qu'on voulait plus haut (la quatrième partie de l'aire du cercle):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin(\pi) + \frac{1}{4}\sin(0) = \frac{\pi}{4}.$$

Explicitons la formule obtenue dans les lignes ci-dessus:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Avec cette formule (et beaucoup de patience...) on peut calculer n'importe quelle intégrale du type $\int \sin^{2k} x \cos^{2h} x \mathrm{d}x$, qui est le seule cas manquant: tout d'abord, on écrit $\sin^{2k} x = (1 - \cos^2 x)^k$ et développe le produit. À ce point on s'est réduit à un polynôme en $\cos^2 x$, et on peut substituer dans chaque terme la formule trouvée. Par exemple, pour calculer

$$\int \cos^4 x \mathrm{d}x = \int \big(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)\big)^2 \mathrm{d}x = \int \big(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)\big)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}\int \cos^2 u \mathrm{d}u = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{16}u - \frac{1}{32}\sin(2u)$$
$$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin(4x).$$

(ici, on a effectué le changement de variable $u = 2x$ et on a utilisé les calculs déjà faits...).

1.5.1 Exercices

Calculer les intégrales suivantes:

$$\int \sin^3 x \cos^2 x \mathrm{d}x; \quad \int \sin^4 x \cos^3 x \mathrm{d}x; \quad \int \sin^4 x \mathrm{d}x; \quad \int \sin^2 x \cos^2 x \mathrm{d}x.$$