Équations différentielles

Un bref résumé avec exemples et exercices

2 décembre 2011

1.1 Équation différentielles du premier ordre

On ne sera intéressé que dans le cas des équations différentielles *linéaires* (les autres étant beaucoup plus difficiles). Elles sont les équations de la forme :

$$u'(x) = a(x)u(x) + h(x), \tag{1}$$

où $a(x)$ et $h(x)$ sont des fonctions d'une variable réelle x. Résoudre une telle équation linéaire signifie trouver toutes les fonctions $u(x)$ telle que la rélation (1) soit vérifiée, où $u'(x)$ est la dérivée de u par rapport à x. Normalement, on écrit plus brièvement (1) comme :

$$u' = a(x)u + h(x).$$

Souvent on demande plutôt la solution d'une équation differentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} u' = a(x)u + h(x) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2}$$

où x_0 et y_0 sont des nombres réels. Cela signifie trouver une fonction u qui vérifie l'équation (1) et en plus qui vaut y_0 dans le point x_0. Voyons un exemple facile :

Exemple 1.1. On considère l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} u' = 2u \\ u(0) = 4 \end{cases} \tag{3}$$

On voit bien qu'une solution de l'équation $u' = 2u$ est la fonction $v(x) = e^{2x}$. Par contre, pour cette fonction $v(0) = 1 \neq 4$, donc v n'est pas une solution de (3). On note que si on multiplie v par n'importe quelle nombre réel on obtient quand même une solution de l'équation différentielle homogène $u' = 2u$, donc si on considère $u(x) = 4v(x) = 2e^{2x}$ on a bien une solution de (3).

Un fait qu'on va assumer est que n'importe quelle équation différentielle linéaire avec condition initiale fixée (2) admet une solution *unique*. Donc si on cherche une solution à l'équation différentielle sans condition initielle (1) on devra obtenir une famille de solution - c'est-à-dire, il doit nous rester un paramètre libre $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour chaque λ on obtient la solution à un problème avec une condition initielle fixée (dans l'exemple de tout-à-l'heure, la solution de l'équation différentielle $u' = 2u$ peuvait s'écrire comme $u = \lambda e^{2x}$, et pour $\lambda = 4$ on satisfaisait la condition initielle $u(0) = 4$).

Il y a essentiellement deux méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre. La première marche à priori pour n'importe quelle ordre, donc est moins efficace de la deuxième qui ne marche que dans le cas d'ordre 1, mais nous donne la solution tout de suite. Voyons d'abord la première : donnée une équation différentielle (2), il s'agit tout d'abord de trouver la solution générale de (1). Pour cela on fait les choses suivantes :

1. On écrit l'équation différentielle homogène associée :

$$u'(x) = a(x)u(x) \tag{4}$$

2. On résout (4). La solution est toujours $\lambda e^{A(x)}$, où $A(x)$ est une primitive de $a(x)$, c'est-à-dire $A'(x) = a(x)$. Il suffit donc de faire une intégrale.

3. On trouve une solution particulière u_1 de (1). C'est-à-dire, on cherche une seule solution de (1), qui ne va pas, peut-être, respecter la condition initiale cherchée.
4. On obtient la solution générale de (1) comme
$$u(x) = \lambda e^{A(x)} + u_1(x).$$
5. Maintenant on peut trouver une solution de (3) en imposant la condition initiale.

Le seul point qui n'est pas immediat est le troisieme : comment trouver une solution particulière ? En général, il n'y a pas de méthode qui marche toujours. Pour les équations linéaires en fait il y a, comme on verra dans la deuxième méthode de solution, mais pour le moment disons seulement que : soit la solution particulière vous est suggérée (avec de phrase du type "chercher une solution particulière de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$" ou bien "trouver des constantes a, b telles que l'expression $a\cos(x) + b\sin(x)$ soit une solution particulière"), soit il y a une solution toute bête, comme une constante, soit la solution particulier est une fonction "du même type" de $h(x)$ (c'est à dire, un polynôme si h est un polynôme, une fonction trigonométrique si h l'est, etc.). Voyons un exemple :

Exemple 1.2. Considerons l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} u' = (\ln x)u - \ln x \\ u(1) = 2 \end{cases}$$

1. On écrit l'équation différentielle homogène associée :
$$u'(x) = (\ln x)u(x).$$
2. La solution générale de cette équation différentielle est $\lambda e^{A(x)}$, où $A(x)$ est une primitive de $\ln x$. On a déjà vu que cette primitive, qui se calcule par partie, est $x\ln x - x$. Donc : $\lambda e^{x\ln x - x}$ (qui peut s'écrire comme $\lambda x^x e^{-x}$).
3. On cherche une solution particulière u_1 de $u' = (\ln x)u - \ln x$; vu que $a(x)$ est égal à $h(x)$, à signe près, on peut choisir une constante : $u_1 = 1$ marche, parce que $u_1' = 0 = \ln x - \ln x$.
4. La solutione générale de $u' = (\ln x)u - \ln x$ est donc $\lambda x^x e^{-x} + 1$.
5. On pose $x = 1$ pour trouver le λ correct. On a : $\lambda e^{-1} + 1 = 2$, donc $\lambda = e$, et la solution est
$$u = ex^x e^{-x} + 1 = x^x e^{-x+1} + 1$$

Dans l'exemple suivant, on cherchera plutôt une solution particulière du type "similaire à $h(t)$" (ceci marche surtout quand $a(x)$ est une constante).

Exemple 1.3. Considerons l'équation différentielle suivante :
$$\begin{cases} u' = 3u + \cos x \\ u(\pi) = 5 \end{cases}$$

1. On écrit l'équation homogène associée :
$$u'(x) = 3u(x).$$
2. La solution générale de cette équation est λe^{3x}.
3. On cherche une solution particulière u_1 de $u' = 3u + \cos x$. Vu que a est une constante et h une fonction trigonométrique, on cherche la solution comme fonction trigonométrique, et on essaye le cas plus simple : $v = a\sin(x) + b\cos(x)$, pour quelques réels a, b. Il faut calculer $v' - 3v$ et voire s'ils existent des a, b tels que $v' - 3v = \cos x$. On calcule :
$$\begin{cases} v' = a\cos x - b\sin x; \\ 3v = 3a\sin x + 3b\cos x; \end{cases} \implies v' - 3v = (a - 3b)\cos x + (-b - 3a)\sin x = \cos x \iff \begin{cases} a - 3b = 1 \\ -b - 3a = 0 \end{cases}$$
Ce système est résolouble, et a pour solution $a = \frac{1}{10}$ et $b = -\frac{3}{10}$. Donc la solution particulière est $v = \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$.
4. La solution générale de $u' = 3u + \cos x$ est donc $\lambda e^{3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{3}{10}\cos x$.

5. Pour trouver la solution à notre problème on pose donc $x = \pi$ et on obtient $\lambda e^{3\pi} - \frac{3}{10} = 5$, donc $\lambda = \frac{53}{10} e^{-3\pi}$. La solution est :

$$u = \frac{53}{10} e^{3x-3\pi} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x.$$

Voyons maintenant la deuxième méthode (appelé "méthode de variation de la constant") pour résoudre des équation différentielles. Elle a le pour de marcher toujours, et le contre de nous demander de faire une intégrale qui a priori peut être assez difficile. Démontrons une chose :

Proposition 1.4. *Soit $u'(x) = a(x)u(x) + h(x)$ une équation différentielle (linéaire, du premier ordre, sans condition initiale). Soit $A(x)$ une primitive de a. Alors la solution générale de l'équation differentielle est*

$$u(x) = (F(x) + \lambda) e^{A(x)}$$

où F est une primitive de $h(x)e^{-A(x)}$.

Démonstration. On doit juste calculer la dérivée $u'(x)$ et voire que c'est égal à $a(x)u(x) + h(x)$. On calcule par Leibniz :

$$u'(x) = F'(x)e^{A(x)} + (F(x) + c)A'(x)e^{A(x)} = h(x)e^{-A(x)}e^{A(x)} + (F(x) + c)a(x)e^{A(x)} = h(x) + a(x)u(x).$$

□

Donc, si on est capable da calculer l'intégrale de $h(x)e^{-A(x)}$ on a tout de suite la réponse. Montrons comment obtenir les mêmes exemples qu'on a travaillé ci-dessus avec cette méthode :

Exemple 1.5. On cherche une solution générale de $u'(x) = \ln(x)u(x) - \ln(x)$. Alors $A(x) = x \ln x - x$, et $h(x) = -\ln x$. On a

$$F(x) = \int e^{-x \ln x + x} \ln x \mathrm{d}x$$

(n'obliez pas le signe qui change!!), intégrale qu'on est capable de calculer parce que $\ln x$ est la dérivée de $x \ln x - x$ (on l'a obtenu de cette façon...). Donc : $F(x) = -e^{-x \ln x + x}$. On obtient :

$$u(x) = (-e^{-x \ln x + x} + \lambda)e^{x \ln x - x} = -1 + \lambda e^{x \ln x - x}.$$

Enfin, on a obtenu la reponse, mais on pourrait dire qu'on a intégré une chose compliquée pour obtenir que une solution particulière est 1...

Le deuxième exemple est aussi moins immediat : on cherche une solution de $u' = 3u + \cos x$. Donc $A(x) = 3x$ et $h(x) = \cos x$. On a

$$F(x) = \int e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x.$$

Cette intégrale est connue, et se calcule par une double intégration par partie (en intégrant à chaque fois l'exponentielle et dérivant la fonction trigonométrique), mais pas d'une façon immediate :

$$\int e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cos x - \frac{1}{3} \int e^{-3x} \sin x \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cos x + \frac{1}{9}e^{-3x} \sin x - \frac{1}{9} \int e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x.$$

De cette façon on a obtenu à nouveau l'intégrale originale, mais en considerant le premier et le dernier term on a une équation qu'on peut utiliser :

$$\frac{10}{9} \int e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}e^{-3x} \cos x + \frac{1}{9}e^{-3x} \sin x \implies \int e^{-3x} \cos x \mathrm{d}x = -\frac{3}{10}e^{-3x} \cos x + \frac{1}{10}e^{-3x} \sin x$$

La solution finale est

$$\lambda e^{3x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x,$$

qui est bien ce qu'on avait déjà trouvé, peut-être avec moins d'effort.

Voyons un dernier exemple où la variation de la constante est plus efficace :

Exemple 1.6. Trouver la solution générale de $u' = -\frac{\cos x}{\sin x}u + \sin^2 x$ sur l'interval $(0, \pi)$.

Dans ce cas, $a(x) = -\frac{\cos x}{\sin x}$, donc $A(x) = -\ln(\sin x)$ (on reconnait tout de suite une fraction avec au numerateur la dérivée du dénominateur ; sinon on peut faire la substitution $y = \sin x$). D'autre part, $h(x) = \sin^2 x$, donc

$$F(x) = \int e^{\ln(\sin x)} \sin^2 x \mathrm{d}x = \int \sin^3 x \mathrm{d}x.$$

On a expliqué comment calculer ces intégrales en général : on écrit $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et on intègre : $F(x) = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \mathrm{d}x = \cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x$. Donc la solution générale est

$$u(x) = F(x)e^{A(x)} = (\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + \lambda)e^{-\ln(\sin x)} = \frac{\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + \lambda}{\sin x}.$$

Notez que ici il n'y a aucune solution particulière simple, donc soit on utilise la méthode de variation de la constante, soit on doit esperer que qui donne l'exercice est assez généreux pour donner une indication sur comme trouver une solution particulière...

1.1.1 Exercices

Resoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière constante :

$$\begin{cases} u' = \frac{u}{1+x^2} - 3\frac{1}{1+x^2} \\ u(0) = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = (x\cos x)u + 2x\cos x \\ u(\pi) = 2\pi \end{cases}$$

Resoudre les équations différentielles suivantes en cherchant une solution particulière du type similaire à la partie non homogène (un polynôme de degré 2 dans les premières 2 équations ; quelque chose du type $a\sin(x) + b\cos(x)$ dans la troisième ; quelque chose du type axe^{bx} dans la troisième).

$$\begin{cases} u' = 2u + x^2 + x \\ u(0) = 3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = \frac{3}{x}u + x + 1 \\ u(0) = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = 5u + 2\cos x + 3\sin x \\ u(-\pi) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = 2u + 3e^{2x} \\ u(0) = -1 \end{cases}$$

Resoudre les équations différentielles suivantes par la méthode de variation de la constante (faites attention aux signes et vérifier vos reponses !) :

$$\begin{cases} u' = \frac{2x+3}{x^2+3x+2}u + x \\ u(0) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = -\frac{1}{(\arctan x)(1+x^2)}u + 1 \\ u(1) = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} u' = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)u + 1 \\ u(1) = 0 \end{cases}$$

1.2 Équation du second ordre

On se contentera du cas suivant : soit $au'' + bu' + cu = 0$ une équation différentielle du second ordre (linéaire, à coefficients constants, homogène). On appelle polynôme associé le polynôme $ax^2 + bx + c$ et Δ son discriminant. Alors il y a 3 cas :

1. $\Delta > 0$. Alors le polynôme a 2 racines différents, α et β, et la solution générale de l'équation différentielle qu'on étudie est $\lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$.
2. $\Delta = 0$. Alors le polynôme a une racine unique, disons α, et la solution générale de l'équation différentielle est $\lambda e^{\alpha x} + \mu x e^{\alpha x}$.
3. $\Delta < 0$. Le polynôme n'a aucune racine réelle. La théorie, qu'on ne vous demande pas de connaître, dit alors que la solution générale s'écrit comme $\lambda e^{\gamma x}\cos(\delta x) + \mu e^{\gamma x}\sin(\delta x)$, où λ et μ sont libres de varier, comme ci-dessus, et γ et δ sont fixés par la condition que $\gamma \pm i\delta$ soient les deux racines complexes du polynôme associé. Le seul cas à retenir est dans les exemples.

Exemple 1.7. $u'' + 4u' + 3u = 0$. Le polynôme associé est $x^2 + 4x + 3$, qui a discriminant positif et racines -1 et -3. Donc la solution générale est $u(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{-3x}$.

$u'' - 6u' + 9u = 0$. Le polynôme associé est $x^2 - 6x + 9$, qui a discriminant null et une unique racine 3. Donc la solution générale de l'équation différentielle est $u(x) = \lambda e^{3x} + \mu x e^{3x}$.

$u'' + u = 0$. Le polynôme associé est $x^2 + 1$, qui a discriminant negatifs. Si vous connaissez quelque chose des nombres complexes, les racines de ce polynôme sont i et $-i$, donc dans la formule $\gamma = 0$ et $\delta = 1$. La solution générale est donc $\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.