Exercices à rendre jeudi 17 novembre

November 9, 2011

1.1 Matrices inverses et déterminants

Pour chacune des matrices suivantes, calculer le déterminant et en deduire quelles sont inversibles. Pour chaque matrice inversible calculer la matrice inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Astuce: il y a (au moins) 2 façons de tester si les calculs sont corrects. Une première, qui marche toujours mais est assez long, est naturellement de calculer $A^{-1} \cdot A$ et voir que le résultat est bien la matrice identité. Une deuxième, moins sûr mais plus vit, consiste à noter que si, comme dans les exemples ci-dessous, les entrées des matrices A, B, $\ldots$, sont des nombres entier, alors les matrices inverses ne peuvent avoir comme dénominateurs que des diviseurs du déterminant. En particulier, si pour une matrice de nombres entiers M on a $\det(M) = \pm 1$, alors M^{-1} sera forcement formée de nombres entiere elle-même; si $\det(M) = \pm 2$, M^{-1} n'aura que des nombres entiers ou des moitiées de nombres entiers, etc.

1.2 Diagonalisation de matrices et puissances

Calculer les valeurs propres des matrices suivantes et en déduire qu'elles sont toutes diagonalisables. À l'aide de la méthode de Gauss, trouver les vecteurs propres correspondants aux valeurs propres, et en déduire une diagonalisation des matrices. Grâce à la diagonalisation trouvée, calculer A^5, B^5 et C^5.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3 *Puissance de matrices non diagonalisables

Démontrer que la matrice suivante n'est pas diagonalisable:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Écrire la matrice comme la somme d'une partie diagonale $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et d'une partie qu'on appellera *nilpotente* $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les matrices D^n et N^n. En rappelant l'identité (valable pour toutes matrices B, C comme dans le cas du produit des nombres)

$$(B + C)^n = B^n + nB^{n-1}C + \frac{n(n-1)}{2}B^{n-2}C^2 + \cdots + nBC^{n-1} + C^n,$$

calculer A^{1000}.