

Exercices à rendre vendredi 7 octobre

October 3, 2011

1.1 Équations et inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes. Pour les inéquations plus compliquées (la 4-ième et la 5-ième), il faut dessiner un tableau de signe. Attention! Combien de solution a vraiment la 4-ième équation (celle avec les racines)?

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 16x = 5; \quad \frac{x^2 - 8}{x^2 - 4} + \frac{2}{x + 2} = \frac{5}{x - 2}; \quad |2x - 1| = |4x + 3|; \\ \sqrt{x + 8} + \sqrt{x + 15} = \sqrt{9x + 40}; \quad 4e^{2x} = 5; \quad 2 \cos(3x - 1) = 0; \\ |x + 1| \geq 3; \quad |2x - 5| > x + 1; \quad x^2 + 2 \geq 3x; \\ x^3 - 3x + 2 > 0; \quad \frac{x^2 - 9}{x^2 - 1} < 0; \quad 5 \ln(6x + 1) \geq 2. \end{aligned}$$

1.2 Dérivations de fonctions en une variable

Ecrire les dérivées premières des fonctions suivantes. Pour chacune, donner ses domaines de définition et de dérivabilité (dans tout cas, x est une variable, a un paramètre réel; s'il y a un tel paramètre, discuter pour quelles valeurs la fonction est continue et/ou dérivable).

$$\begin{aligned} f(x) = \left(x^2 - \frac{2}{x^3}\right)^2; \quad g(x) = \sqrt{\ln(x)}; \quad h(x) = xe^{\sqrt{x}}; \\ j(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2 + 1}; \quad k(x) = (15x)^{\sqrt{\sin x}}; \quad l(x) = \sin^2(\cos(\sin x)); \\ m(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sin x}; \quad n(x) = \frac{\ln(2)x^3}{\arctan(x)}; \quad p(x) = \begin{cases} \ln(x + 1) & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 + x & \text{si } x < 0 \end{cases} \\ q(x) = \begin{cases} a \cos(ax) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{1}{x+1} & \text{si } x < 0 \end{cases}; \quad r(x) = \begin{cases} x^4 + x^2 - 2 & \text{si } |x| \geq 1 \\ a \ln|x| & \text{si } |x| < 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

1.3 Dérivations de fonctions en plusieurs variables

Ecrire les dérivées premières et secondes des fonctions suivantes, par rapport à toutes variables possibles. Dans quels cas les dérivées commutent (c'est-à-dire, dériver d'abord par rapport à une variable, disons x , et puis par rapport à une

autre, disons y , donne le même résultat que dériver par rapport à y et puis par rapport à x ?

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad g(x, y) = xy^2 + xy + y^3; \quad h(x, y) = xe^{xy};$$

$$j(x, y, z) = z^2 \cos(xy); \quad k(x, y, z) = \frac{xy^2}{\arctan z}; \quad l(x, y, z) = x^y \sin z.$$

1.4 Dessins

Trouver les zéros des fonctions suivantes; pour chacune, déterminer où elle est croissante et où elle est décroissante, évaluer la fonctions aux points de changement de sens de croissance. Avec ces informations, dessiner le graphe de la fonction de la façon la plus précise possible (pour cette partie vous pouvez utiliser un calculette... mais cela ne sera pas possible au CC!).

$$f(x) = x^3 - 3x + 2; \quad g(x) = x^3 + 4x^2 - 13x + 8; \quad h(x) = x^3 - 7x^2 + 5x.$$