Exercices à rendre avant le 30 septembre

September 25, 2013

1 Récurrence

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 2$ on a $n! < n^n$.
2. Démontrer par récurrence que $11^n - 6$ est divisible par 5 (pour tout $n \geq 1$ ou même $n \geq 0$, car les nombres négatifs ne doivent pas faire peur!).
3. Démontrer par récurrence que $n^3 - n$ est divisible par 6 pour n'importe quel $n \in \mathbb{N}$ (à un moment donné, il faudra se rappeler que n est pair si et seulement si n^2 l'est).
4. Définissons par récurrence la suite de Fibonacci:
$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad \forall n \geq 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$
Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 6$, $a_n > n$ (calculer d'abord quelques termes de la suite "à la main" pour s'en convaincre).
5. Montrer par récurrence que $n! > a_n$ pour tout $n > 1$.
6. Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ le naturel $2^{2n} - 1$ est divisible par 3.

2 Absurde, Exponentiels et Logarithmes

1. Démontrer qu'ils n'existent pas deux nombres entiers a, b tels que $21a + 30b = 1$.
2. Démontrer qu'ils n'existent pas deux nombres entiers a, b tels que $a^2 - 4b = 2$ *(Trace: le cas a impair est facile; si a est pair, qu'est-ce qu'on peut dire de a^2 de mieux qu'au point 1? Simplifiez l'équation obtenue pour avoir une contradiction).*
3. On va démontrer qu'ils existent deux nombres irrationnels $a, b \notin \mathbb{Q}$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.
   (a) Démontrer par l'absurde que $\log_2 9$ n'est pas rationnels, en écrivant par contradiction $\log_2 9 = \frac{p}{q}$, pour certains $p, q \in \mathbb{Z}$ (que l'on peut supposer positifs; pourquoi?) et en utilisant les propriétés des logarithmes pour obtenir une contradiction;

(b) Posons $a = \sqrt{a}$ et $b = \log_2 9$. Computer a^b et vérifier qu'il s'agit bien d'un nombre rationnel.

4. Démontrer par contradiction qu'il n'existe pas un nombre réel positif plus petit que n'importe quel autre nombre réel positif.

5. Soit $x > 0$. Démontrer que si $x^x = x$ alors $x = 1$. *[Idée: rappelez-vous que $a^b = e^{b \ln a}$.]*

6. Soit f la fonction réelle donnée par $f(x) = \ln(\ln(x))$. Quel est son domaine? Est-elle surjective? Démontrer que, pour tout x dans le domaine, $f(x) < \ln(x)$. En déduire que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

3 Inégalités

Résoudre les inégalités suivantes (après avoir donné les domaines de définition):

1. $\frac{x-2}{x+5} > 0$;
2. $-1 < \frac{3-x}{2} \leq 0$;
3. $|x^2 - 3| < 2$;
4. $\frac{\frac{1}{x}-3}{1-\frac{5}{x}} < 3$;
5. $e^{x^2+3x} > 5$;
6. $\ln(3x+2) \leq \ln(\ln(2))$.

References

[1] Vincent Blondel, *Analyse - Cours et exercices corrigés*, (DEUG-SVT), Dunod.

[2] G. Biau, J. Droniou, M. Herzlich, *Mathématiques et statistique pour les sciences de la nature* EDP Sciences.