Exercices à faire et rendre avant le 3 octobre

September 16, 2011

Les éxercises marqués avec * sont plus difficile des autres. Ils sont inserés comme challenges pour les étudiants qui, après avoir résolu les éxercises plus faciles, désirent tester d'avoir bien compris les concepts du sujet. Il ne sont pas indicatifs de la difficulté des CC ni de l'examen! En effet, même les exercises plus facile sont, peut-être, legèrement plus durs de ceux qu'on va trouver dans le CC.

Toutes solutions sont à consigner en papier ou par email à Marco.Spinaci@ujf-fourier.fr.

1 Ensembles et propositions

Exercice 1: Écrire toutes les implications correctes entre les propositions qui suivent et leurs négations. On demande ici d'écrire toute implication de la forme $(X) \implies (Y)$, où X, Y sont soit une proposition (A, B, ..., G) soit la négation d'une proposition (nonA, nonB, ..., nonG). On va assumer que, dans le monde, il y a au moins un italien, une personne qui parle français correctement, et un enseignant de mathématiques, mais on fait pas d'autres assumptions (même si les étudiants de ce cours savent bien que dans le monde réel il y a au moins un italien qui enseigne mathématiques et parle un français parfait).

(A) Tout italien parle français correctement.

(B) Il y a un italien qui enseigne matématiques et parle français correctement.

(C) Tout italien qui enseigne matématiques parle français correctement.

(D) Il n'y a aucun italien qui enseigne mathématiques.

(E) Il n'y a aucun enseignant de mathématiques qui parle français correctement.

(F) Tout le monde parle français correctement.

(G) Tout enseignant de mathématiques parle français correctement.

En notant $E = \{$ Toutes les personnes dans le monde $\}$ (notre ensemble "univers"), $I = \{$ Les italiens $\}$, $M = \{$ Les enseignants de mathématiques $\}$ et $F = \{$ Les personnes qui parlent français correctement $\}$, représenter graphiquement chaque condition donné par les propositions ci-dessus (en 7 dessins différents) avec des ensembles. On va respecter la convention que les circles représentants deux ensembles qui ont intersection vide ne se coupent pas, et que un petit point est marqué dans l'interieur de l'intersection si l'on est sûr que cette intersection n'est pas vide.

Exercice 2: Traduire les phrase suivantes dans des propositions mathématiques "élémentaires" en utilisant seulement les symbols suivants: $\forall$, $\exists$, $\in$, $\notin$, $=$, $\neq$, $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, $\implies$, $\iff$, et, ou, ! (en particulier, n'utiliser pas les symbols $\subset$ et "divise", en les remplaçant par des formules équivalentes). Dans ce qui suive, on va toujours denoté avec f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, avec x un nombre réel, avec t une indéterminée, et avec A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$. Donc il ne faudra pas définir ces lettre avec des quantificateurs ($\forall$ ou $\exists$), étant leure signification fixée.

1. f est une fonction injective.
2. f est une fonction surjective.
3. f ne s'annulle jamais.
4. x est une racine du polinôme $x^2 + 1$.
5. $A \subseteq \{$ nombres pairs $\} \cup \{$ nombres impairs $\}$.
6. f est majorée par g.
7. Il n'existe pas un réel positif plus petit que tous autres réels positifs.
8. Il n'existe pas un nombre entier strictement plus grand que son factoriel.

Exercice 3: Pour deux fonctions $f_1, f_2 \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ (ici, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ dénote l'ensemble des réels positifs), on considère les propositions suivantes:

(a) $\forall i \in \{1, 2\}$, $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que ($x < y$ et $f_i(x) < f_i(y)$).

(b) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall i \in \{1, 2\}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que ($x < y$ et $f_i(x) < f_i(y)$).

(c) $\exists x, y \in \mathbb{R}$ tels que $\forall i \in \{1, 2\}$ ($x < y$ et $f_i(x) < f_i(y)$).

(d) $\exists i \in \{1, 2\}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ ($x < y$ et $f_i(x) < f_i(y)$).

(e) $\forall x \in \mathbb{R}$ $\exists i \in \{1, 2\}$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tels que ($x < y$ et $f_i(x) < f_i(y)$).

(f) $\exists x \in \mathbb{R}$, $\exists i \in \{1, 2\}$ tels que $\forall y \in \mathbb{R}$ ($x < y \implies f_i(x) < f_i(y)$).

Dans ce qui suive, on va écrire brèvement "pour f_1, f_2, (x) $\implies$ (y)" avec la signification que la vraité de la proposition (x) pour les fonctions f_1, f_2 implique la vraité da la proposition (y) pour les mêmes fonctions, et de même pour des phrases comme "pour f_1, f_2, (x) est vraie/fausse".

1. Donner un exemple (par une formule ou un dessin) de deux fonctions f_1, f_2, pour lesquelles (c) est vraie.
2. Démontrer que, pour toutes f_1, f_2 pour lesquelles (c) est vraie, (b) est automatiquement vraie (on écrira pour brèvete: (c) $\implies$ (b)).
3. Démontrer que (b) $\implies$ (a). En joignant ce deux faits, qu'est-ce qu'on peut déduire pour f_1, f_2 pour lesquelles (c) est vraie?

4.* Pouvet vous donner un exemple de f_1, f_2 qui satisfont (b), mais pas (c)?

5.* et de f_1, f_2 qui satisfont (a), mais pas (b)?

6. Montrer, à l'aide d'exemples, qu'il n'y a pas d'implications entre une proposition du groupe {a, b, c} et la proposition (d); par exemple, on devra montrer qu'il y a deux fonctions f_1, f_2 qui satisfont (a) mais pas (d), et deux autres qui satisfont (d) mais pas (a), et même pour (b) et (d), (c) et (d). (Petite astuce: en utilisant (2) e (3) ci-dessus, il suffit d'une part de trouver des fonctions pour lesquelles (d) est vraie est (a) est fausse, parce que (b) et (c) seront fausses par consequence; d'autre part, il suffit de trouver f_1, f_2 pour lesquelles (c) est vraie et (d) est fausse).

7. Montrer que (d) $\implies$ (e).

8. Montrer par des examples qu'il n'y a pas d'implications même entre d et f, ni entre e et f.

9.* En traçant les graphiques de $f_1(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ et $f_2(x) = \frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{x}$, se convaincre que (e) n'implique pas (d), cet-à-dire, pour ces deux fonctions (e) est vraie, mais (d) est fausse. Il est facile de se convaincre que (d) est fausse pour tout le deux fonctions; pour montrer que (e) est vraie, on peut d'abord observer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ qui sont "mauvais" pour f_1 (cet-à-dire, pour lesquels il n'existe pas d'$y > x$ avec $f_1(y) > f_2(x)$) est contenu dans

$$A = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right) \cup \left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\right) \cup \left[4\pi + \frac{\pi}{2}, 4\pi + \pi\right) \cup \dots$$

Par contre, pour tout $x \in A$, $f_2(x) < 0$, donc il y a plein de $y > x$ tels que $f(y) > f(x)$. Une preuve rigoureuse de ces faits est trop technique est ne sera pas demandée.

2 Raisonnement par récurrence et par l'absurde

Exercice 4:

1. Montrer par récurrence que $n! < n^n$.

2. Montrer directement que $\frac{n!}{n^n} < \frac{1}{n}$, qui implique le point precedent; qu'est-ce qu'on peut en deduire sur la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}?$$

3. Pouvez-vous adapter la démonstration qui precède pour calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^{n-2}}?$$

4. Définissons par récurrence la suite de Fibonacci:

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 1; \quad \forall n \geq 3,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 6$, $a_n > n$.

5. Montrer l'identité

$$n! = (n-1) \cdot (n-1)! + (n-1)!$$

L'utiliser pour montrer par récurrence que $n! > a_n$ pour tout $n > 1$.

6. Montrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_{3k+1} et a_{3k+2} sont impairs, et a_{3k+3} est pair. Attention! Combien de cas faut-il montrer "à la main" avant de pouvoir appliquer le principe de récursion?

7. Rappelez qu'on a montré au cours l'inégalité triangulaire: pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$. Montrer pour récurrence la généralisation suivante: soit $k \in \mathbb{N}$ un nombre entier non null. Pour tout $x_1, \ldots, x_k$,

$$|x_1 + \ldots + x_k| \leq |x_1| + \ldots + |x_k|.$$

8.* Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

Indication: écrire $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}$, *et appliquer la récurrence. Puis élever au carré et simplifier toute fois que c'est nécessaire.*

Remarque historique: la suite de Fibonacci est appelée après son inventeur, le mathématique italien du XIII siecle Lorenzo Fibonacci. Il avait posé la question de determiner l'evolution d'une population de lapins monogames et immortels, qui se reproduisent avec cette loi: chaque lapin devient fertile après un mois de vie; chaque moi, chaque couple de lapins fertiles engendrent une autre couple de petits lapins. Au premier moi, il y a qu'une couple de lapins, encore enfants. Alors, la suite a_n *ci-dessus décrit le nombre de couple de lapins après* n *mois.*

Exercice 5:

1. Démontrer avec un raisonnement par l'absurde qu'un nombre a est pair si et seulement si a^2 l'est. *(rappelez qu'un nombre entier* b *est paire si et seulement si il peut s'écrire comme* $2c$*, pour* c *un autre nombre entier).*

2. Démontrer qu'un nombre a est impair si et seulement si a^2 l'est. *(faut-il utiliser à nouveau le raisonnement par l'absurde? Essayer de le faire, mais aussi de trouver une solution plus directe, après l'exercice qui precède).*

3. Démontrer que si $a \in \mathbb{Q}$ et $ab \notin \mathbb{Q}$, alors forcemment $b \notin \mathbb{Q}$.

4. Démontrer qu'ils n'existent pas deux nombres entiers a, b tels que $21a + 30b = 1$.

5.* Pouvez-vous caracteriser les nombres entiers c tel qu'ils existent $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $21a + 30b = c$?

6.* Démontrer qu'ils n'existent pas deux nombres entiers a, b tels que $a^2 - 4b = 2$ *(Trace: le cas* a *impair est facile; si* a *est pair, qu'est-ce qu'on peut dire de* a^2 *de mieux qu'au point 1? Simplifiez l'équation obtenue pour avoir une contradiction).*