Solution du CC2

November 22, 2011

1 Exo 1

1.1 S1

$$(S1): \begin{cases} x+3y=1 \\ 2x+4y=3 \\ x+7y=-1 \end{cases}$$

On utilise la mthode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 7 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le systme admet une solution unique, qui est donn par $x = \frac{5}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$.

1.2 S2

$$(S2): \begin{cases} x+3y+z=5 \\ -x-2y=-2 \\ x+4y+2z=8 \end{cases}$$

On utilise encore une fois la mthode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & -2 & 0 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le systme a infinies solutions, donn par $x = -4 + 2z$ et $y = 3 - z$, avec n'import quel $z \in \mathbb{R}$.

2 Exo 2

2.1 2a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les dterminants sont (ici on developpe le dterminant de B sur la premire ligne) :

$$\det(A) = 1 \cdot 6 - (-2 \cdot (-3)) = 0;$$

$$\det(B) = 2 \det \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - 1 \det \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + 4 \det \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 9 - 1 \cdot 8 + 4 \cdot (-3) = -2.$$

Donc uniquement B est inversible. On en calcule l'inverse par la mthode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -5 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 4 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Donc

$$B^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{9}{2} & -\frac{11}{2} & -4 \\ 4 & 5 & 4 \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

2.2 2b

$$A \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right); \quad A \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 5 \\ 7 \end{array}\right); \quad B \cdot \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} -2 \\ -4 \\ 3 \end{array}\right).$$

Le point prcdent nous donne tout de suite la solution du troisieme systme: il suffit de multiplier la matrice B^{-1} par le vecteur $\left(\begin{array}{c} -2 \\ -4 \\ 3 \end{array}\right)$:

$$3^{\text{eme}} \text{ systme : } \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\right) = B^{-1} \cdot \left(\begin{array}{c} -2 \\ -4 \\ 3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} 19 \\ -16 \\ -6 \end{array}\right).$$

Par contre, nous ne connessons pas les premiers deux systme d'une façon immediate: on sait seulement que le premier systme aura infinies solutions. Pour le trouver il suffit de considerer la premire quation du systme, et on trouve :

$$1^{\text{er}} \text{ systme : } x = 3y.$$

Enfin, le deuxime systme n'admet pas de solution, parce que les deux quations sont incompatibles. On le voit par exemple par Gauss (ou par substitution) :

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 6 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 17 \end{array}\right).$$

3 Exo 3

On commence par trouver les valeurs propres de A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \left(\begin{array}{cc} -17 - \lambda & 9 \\ -30 & 16 - \lambda \end{array}\right) = (-17 - \lambda)(16 - \lambda) + 30 \cdot 9 \\ &= -272 + \lambda + \lambda^2 + 270 = (\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0 \end{aligned}$$

Donc les valeurs propres sont 1 et -2. Ils sont deux, donc A est diagonalisable. On cherche un vecteur propre associ la valeur propre 1:

$$A - I = \left(\begin{array}{cc} -18 & 9 \\ -30 & 15 \end{array}\right),$$

et le systme homogne associ dgnre (justement) une seule quation, qui se simplifie en $-2x + y = 0$. Un vecteur propre de valeur propre 1 est donc:

$$\mathbf{v} = \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\right).$$

On cherche maintenant un vecteur propre associ la valeur propre -2.

$$A + 2I = \left(\begin{array}{cc} -15 & 9 \\ -30 & 18 \end{array}\right),$$

et encore une fois le systme homogne associ est quivalent une seule quation, xplicitement: $-5x + 3y = 0$. Un vecteur propre associ -2 est donc

$$\mathbf{w} = \left(\begin{array}{c} 3 \\ 5 \end{array}\right).$$

La matrice A peut donc s'crire comme PDP^{-1}, ou on a:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut calculer l'expression pour A^6 grâce cette quation:

$$A^6 = PD^6P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 379 & -189 \\ 630 & -314 \end{pmatrix}.$$

Travaillons maintenant la matrice B. On commence toujours par chercher les valeurs propres:

$$\det(B - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & -2 \\ 0 & 8-\lambda & 12 \\ 0 & -6 & -9-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda) \cdot \big((8-\lambda)(-9-\lambda) + 72\big) = (1-\lambda) \cdot \lambda \cdot (\lambda + 1);$$

ici on a naturellement dvelopp le dterminant sur la premire colonne, et on a utilis l'identit triviale $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1)$. Donc les valeurs propres sont -1, 0 et 1, et la matrice B est diagonalisable. Cherchons les vecteurs propres associs, en commençant par $\lambda = 1$: on pourrait, dans ce cas, voir tout de suite que un vecteur propre associ est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, vu que la premire colonne de la matrice est dj diagonalise. Sinon, on procde avec la mthode usuelle:

$$B - I = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 12 \\ 0 & -6 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on obtient du systme homogne associ les quations $y = 0$ et $z = 0$, d'o ncessairement $x \neq 0$, et donc on peut prendre comme vecteur propre

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On considre maintenant la valeur propre $\lambda = 0$. Alors

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc le systme homogne associ est donc quivalent aux quations $2x = -5z$ et $2y = -3z$. On peut choisir $z = -2$ et un vecteur propre est

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Enfin, pour la valeur propre $\lambda = -1$, on a

$$B + I = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 9 & 12 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -6 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a, comme il faut, une ligne des zros; le systme homogne associ cette matrice est donc quivalent aux quations $x = -z$ et $3y = -4z$. On peut par exemple chosir $z = -3$ et trouver le premier vecteur propre:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On peut donc crire la matrice B comme le produit PDP^{-1} o

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, on calcule l'inverse de la matrice P (dont le dterminant, par connaissance, est -1), avec la mthode de Gauss (notez que ici, pour ne pas avoir des dnominateurs inutils, on commence par sommer la troisime ligne la deuxime):

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & -5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -9 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -11 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On peut maintenant calculer B^{1000}:

$$B^{1000} = P \cdot D^{1000} \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -9 & -11 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 & -20 \\ 1 & -8 & -12 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ici il faut noter que le calcul de P^{-1} est tout--fait inutile: une fois qu'on a calcul les valeurs propres de B et on sait qu'il ne sont que -1, 0 et 1, on sait automatiquement que $D^2 = D^4 = D^6 = \ldots = D^{1000}$. Donc en particulier $B^2 = PD^2P^{-1} = B^4 = PD^2P^{-1} = \ldots = B^{1000} = PD^{1000}P^{-1}$. Donc pour calculer B^{1000} il suffit de calculer B^2, chose que l'on peut fair plus rapidement qu'en calculant l'inverse de P et puis les produits comme ci-dessus.

4 Exo 4

Il s'agit tout simplement de calculer l'inverse de P (dont le dterminant est -1) et multiplier les matrices. On commence par le calcul de l'inverse par la mthode de Gauss (on simplifie les choses en permutant tout d'abord le lignes):

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Donc on peut calculer:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut en conclure que la matrice A est diagonalisable et qu'elle a pour valeurs propres 3 (qui est "double", vu qu'il paraît 2 fois dans la diagonalisation) et 1. On peut en dduire le dterminant de $A - \lambda I$ en raisonnant l'enverse qu'au usuel: il est un polynôme de degr 3 qui commence par $-\lambda^3$ et s'annulle deux fois en 3 et une fois en 1, donc

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda + 3)^2 \cdot (-\lambda + 1).$$

En particulier, on obtient le dterminant de A en remplaçant $\lambda = 0$, donc $\det A = 9$.