Durée : 1h15; documents et calculette interdits.
Il faut justifier toute réponse ! Les points donnent un barême *indicatif.*
Les éxercices sont indépendantes entre eux, et, où il n'est pas explicitement indiqué "en utilisant le point(s) précèdent(s)", les différentes parties d'un exercice le sont aussi.

1. Calculer l'intégrale suivante par partie. (3)
$$\int_1^e \frac{\ln(t)}{t^2}\mathrm{d}t$$

2. (a) En utilisant le changement de variable $u(x) = x^{\frac{1}{3}}$, calculer la primitive suivante sur l'interval $x > 0$ (rappelez-vous d'exprimer la solution en terms de x et pas de u!). (4)
$$\int \frac{1}{x + x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x.$$
   (b) En utilisant le point précèdent, calculer (1)
$$\int_1^8 \frac{1}{x + x^{\frac{2}{3}}}\mathrm{d}x.$$

3. (a) Trouver des réels a, b, c tels que (3)
$$\frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x} = a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2} + c\frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$
   (b) En utilisant des changements de variables, calculer les intégrales suivantes (on pourra utiliser les changements de variables $u(x) = x^2 + 2x + 2$ et $u(x) = x + 1$. À vous de découvrir quel changement est le bon dans chaque cas ! Et surtout n'oubliez pas de modifier les extrêmes d'intégration!) (2)
$$\int_1^2 \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 2}\mathrm{d}x; \quad \int_1^2 \frac{1}{x^2 + 2x + 2}\mathrm{d}x.$$
   (c) En utilisant les points précédents, calculer (1)
$$\int_1^2 \frac{3x^2 + x - 2}{x^3 + 2x^2 + 2x}\mathrm{d}x$$

4. (a) À l'aide d'un changement de variables, démontrer qu'une primitive de $a(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ pour $x \in (0, \pi)$ est $A(x) = -\ln(\sin(x))$. (1)
   (b) Soit donnée l'équation différentielle (2)
$$u' = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)}u + \cos^2(x). \qquad \text{(E)}$$
   Écrire l'équation différentielle homogène associée, et en donner la solution générale sur $(0, \pi)$.
   (c) Trouver une solution particulière de (E), soit en utilisant la méthode de variation des constantes, soit en chercheant une solution de la forme $b \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin x}$, où b est une constante à déterminer. (2)
   (d) En utilisant les points précèdents, écrire la solution générale de (E) sur $(0, \pi)$ et en déduire l'unique solution u telle que $u\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. (1)