

Durée : 1h15; documents et calculatrice interdits.

Il faut justifier toute réponse ! Les points donnent un barème *indicatif*.  
Les exercices sont indépendantes, commencez par ceux que vous préférez !

1. Résoudre les systèmes linéaires suivants: (4)

$$(S1) : \begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \\ x + 7y = -1 \end{cases} ; \quad (S2) : \begin{cases} x + 3y + z = 5 \\ -x - 2y = -2 \\ x + 4y + 2z = 8 \end{cases}$$

2. (a) Calculer les déterminants des matrices suivantes; déterminer lesquelles sont inversibles, et calculer leurs inverses. (4)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -4 & -3 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Déterminer les solutions des systèmes suivants, où possible à l'aide du point qui précède : (2)

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}; \quad B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Trouver les valeurs propres des matrices suivantes. En déduire qu'elles sont diagonalisables. Puis calculer les vecteurs propres et écrire les matrices de diagonalisation pour calculer les puissances  $A^6$  et  $B^{1000}$  (il est demandé d'écrire les résultats explicites seulement dans les cas où les valeurs propres sont -1, 0 ou 1). (8)

$$A = \begin{pmatrix} -17 & 9 \\ -30 & 16 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 12 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

4. Vérifier que la matrice  $A$  suivante est diagonalisée par  $P$ , c'est-à-dire que  $P^{-1}AP$  est diagonale. En déduire les valeurs propres de  $A$ . Pouvez-vous écrire grâce à ce résultat le déterminant de  $A - \lambda I_3$  sans le calculer? Utiliser cette expression pour calculer le déterminant de  $A$ . (3)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$