Durée : 1h15; documents et calculette interdits.
Il faut justifier toute réponse ! Les points donnent un barême *indicatif*.
Les questions sont assez indépendantes entre elles, commencez par celles que vous préférez !

1. (a) Écrire les fonctions dérivées des fonctions suivantes : (5)

$$f(x) = \frac{\sin x}{4x^2}; \quad g(x) = x\tan(\ln x);$$

$$h(x) = \sqrt{\arctan(x^2+1)}; \quad j(x) = \begin{cases} \arctan(mx) & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   (b) Pour quels valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est $j(x)$ continue en 0 ? Entre ceux, pour quels elle est aussi dérivable en 0 ? (1)

   (c) Donner les domaines de définition de $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ et $j(x)$. Donner les domaines de dérivabilité des fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ (c'est-à-dire, les domaines de définition de $f'(x)$, $g'(x)$, $h'(x)$ respectivement). (2)

2. (a) Écrire les négations des propositions suivantes: (2)

   (P) $\forall x \in \mathbb{R}\ x^5 - 1 = 0 \implies x \in \mathbb{N}$.

   (Q) $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{Q}\ x < y$ ou $x > y$.

   (b) Laquelle parmi (P) et (nonP) est vraie ? Laquelle parmi (Q) et (nonQ) ? (1)

3. Écrire les dérivées premières $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ où (3)

$$f(x,y) = (\ln y)^{e^x}.$$

4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ naturel $2^{2n} - 1$ est divisible par 3. (2)

   (b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$ naturel on a (2)

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)2^k = n2^{n+1}.$$

5. (a) Soit (1)

$$f\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (-1,1)$$

   la fonction $f(x) = \sin x$. Montrer que $f$ est strictement croissante.

   (b) En déduire que $f$ est inversible, et calculer la fonction dérivée de la fonction réciproque (2)

$$f^{-1}\colon (-1,1) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

   (on utilisera, quand nécessaire, les rélations trigonométrique pour réduire l'expression trouvée en terme des fonctions élémentaires).