CC3 M111 — Mat111b 12/08

Exercice 1
Questions de cours. Donner l'exemple correcte (peut-etre avec une justification succincte) suffit.
1) Donner un example de nombre entier qui n'est pas naturel.
2) Donner un example d'une fonction continue qui n'est pas derivable.
3) Donner un example d'une primitive de la fonction $f\colon]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.
4) Voici une définition incomplete de valeur propre de la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$:
"Le nomber réel λ est un valeur propre de A si et seulement si

$$\Box\ \vec{v} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\},\ A\vec{v} = \lambda\vec{v}. \qquad \text{"}$$

Remplacer "$\Box$" par le bon symbole : $\ni$, $\forall$, $\exists$, $\in$, $\leq$, $\exists!$, $\sum$, $\spadesuit$ ou $\heartsuit$?

Exercice 2
1) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $u' = u + 1$.
2) Donner toutes les solutions de l'équation différentielle $u' = u + e^t$
(utiliser la méthode de variation de la constante).
3) Déduire de (1) et (3) toutes les solutions de l'équation différentielle

$$u' = u + 1 + e^t.$$

4) Donner l'unique solution de l'équation précedente qui satisfait $u(0) = 0$ et dessiner son graphe (si vous n'avez pas repondu à la question précedente, faire cela pour la dernière reponse que vous avez donné au point (2) ou (1)).

Exercice 3
1) Calculer

$$\int \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx$$

(si vous avez une envie soudaine de faire une substitution de variable, essayez avec $u = \frac{e^x}{2}$).
Vérifier votre calcul : a-t-on vraiment trouvé une primitive de $\frac{e^x}{4+e^{2x}}$?
2) Calculer

$$\int_0^1 \frac{e^x}{4 + e^{2x}} dx.$$

3) Calculer

$$\int \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx$$

(psst ! écrire sous la forme $A/(x-1) + B/(x-2) + C/(x-3)$.)
4) Calculer

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} dx.$$

Notez que le graphe de $f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$ que j'ai dessiné à la fin (Fig 1) montre que la fonction est négative. Vérifier que l'integral obtenu est bien un nombre négatif.

Exercice 4.
1)Vérifier que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 29/2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible.

2) Calculer

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 19/2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P$$

3) Calculer $P^{-1}AP$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4) Diagonaliser A donner ses valeurs propres et ses vecteurs propres (sans faire aucun calcul).
5) Diagonaliser A en faisant les calculs avec la methode usuelle (resoudre $\det(A - \lambda I_3) = 0$ etc...).

FIG. 1 – le graphe de $f\colon [-1, 0] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2}{x^3-6x^2+11x-6}$

.

CC3, MAT111

Pas de documents ni de calculette

Le contrôle dure 1 heure.

Question de cours.

(1) Donner la définition d'une fonction étagée sur un intervalle $[a, b]$. Donner un exemple d'une fonction étagée sur l'intervalle $[0, 1]$.

(2) Donner le formule d'intégration par parties pour des fonctions dérivables u et v définies sur $\mathbb{R}$.

(3) Soient θ et ϕ deux nombres réels. Donner les formules de linéarisation permettant d'écrire les produits $\sin(\theta)\cos(\phi)$, $\cos(\theta)\cos(\phi)$ et $\sin(\theta)\sin(\phi)$ comme des sommes.

Exercice 1.

(1) Ecrire les produits $\sin(t)\cos(2t)$ et $\cos^3(2t)$ comme des sommes.

(2) En déduire les intégrales $\int_0^\pi \sin(t)\cos(2t)dt$ et $\int_0^\pi \cos^3(2t)dt$.

Exercice 2.

(1) Calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi t\cos(t)dt$$

en utilisant une intégration par parties.

(2) Calculer l'intégrale

$$\int_0^\pi e^t\cos(t)dt$$

en utiilisant deux intégrations par parties.

Exercice 3.

(1) Calculer la primitive

$$\int \frac{2t+2}{t^2+2t+2}dt$$

par un changement de variables $s = t^2 + 2t + 2$.

(2) Calculer la primitive

$$\int \frac{1}{t^2+2t+2}dt$$

par le changement de variables $s = t + 1$.

(3) En déduire la primitive

$$\int \frac{3t-1}{t^2+2t+2}dt.$$

Université Grenoble I
Cours Mat111a
Mardi 9 décembre 2008

Mathématiques
Année 2008-2009
9H45-10H45

Contrôle continu n°3

Durée : 1 H

Avertissement : La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note finale. Je rappelle qu'en Mathématique toute **affirmation** doit être **justifiée**, soit en faisant appel au cours, soit par équivalence avec un énoncé plus simple, clairement vrai. Et tout cela avec une extrême rigueur !

Exercice 1.

1) *Question de cours* : Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
$$e^{u(x)}, \qquad \ln|u(x)|, \qquad u(x)^\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R}), \qquad \sqrt{u(x)}.$$
2) Calculer les dérivées de
$$f(x) = x\ln(2x+1), \qquad g(x) = \frac{1}{1+2x^2} \quad \text{et de} \quad h(x) = e^{\sqrt{x}}.$$
3) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ de $f(x,y) = \frac{1}{y-3x}$.

Exercice 2.

1) *Question de cours* : Rappeler la formule d'intégration par partie pour deux fonctions $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivables.
2) Calculer les intégrales suivantes :
$$\int_0^\pi x\cos(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 \arctan(x)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 3.

1) À l'aide du changement de variable $u(t) = \ln(t)$, montrer que, pour tout $x \geq 0$, on a
$$I(x) := \int_0^x \frac{e^t-1}{e^t+1}\,\mathrm{d}t = \int_1^{e^x} \frac{t-1}{t(t+1)}\,\mathrm{d}t.$$
2) Déterminer deux nombres réels a, b tels que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1\}$, on a
$$\frac{t-1}{t(t+1)} = \frac{a}{t} + \frac{b}{t+1}$$
.
3) En déduire la valeur de $I(x)$ pour tout $x \geq 0$.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER
MATHÉMATIQUES

Année 2008/09
Mat111b BIO 06

Interrogation écrite

8 décembre 2008

Les calculatrices sont interdites. On justifiera toutes les réponses.
On apportera le plus grand soin à la rédaction.

Exercice 1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et donnée par la formule suivante :

$$f(x) = \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right).$$

a) Calculer la dérivée de la fonction f (bien simplifier l'expression obtenue).
b) Donner la valeur de $f(1)$.
c) Déduire des deux questions précédentes la valeur de $f(\pi)$.

Exercice 2. Calculer les valeurs suivantes.

$$A = \int_0^\pi \cos x\,dx, \qquad B = \int_1^4 \sqrt{t}\,dt, \qquad C = \int_0^{\pi/2} (\cos x)(\sin x)^7 dx.$$

Exercice 3. Calculer la valeur suivante (indication : on pourra par exemple effectuer le changement de variables $u = \sqrt{t}$ puis intégrer par parties ; la valeur finale doit être de la forme $(e^2+1)/m$ où m est un entier).

$$D = \int_1^e t\ln(\sqrt{t})\,dt.$$

Exercice 4. Donner une primitive de la fonction

$$n(t) = \frac{t^3+4t^2+7t+6}{(t+1)^2(t^2+4t+5)}$$

(indication : on pourra écrire $n(t)$ sous la forme $A/(t+1)^2 + (Bt+C)/(t^2+4t+5)$).

Université Joseph Fourier, Mat111b 2008-2009.

CC3 : vendredi 12 décembre 2008, durée 1h

Documents interdits

Exercise 1 En faisant une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes.

1) $\int x^2 \cos(2x)\, dx$,

2) $\int_1^e x^3 \ln(x)\, dx$,

Exercise 2 En faisant un changement de variables, calculer les intégrales suivantes.

1) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$, (en posant $u = \sqrt{x}$)

2) $\int_0^1 \frac{e^x}{3e^x+1}\, dx$, (en posant $u = e^x$)

Exercise 3 1) Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x+1}$.

a) Déterminer des réels a, b, c de sorte que, pour tout $x \neq -1$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

b) En déduire une primitive de f sur $]-\infty, -1[$.

2) Déterminer une primitive de $\frac{3x+1}{x^2+x+2}$ sur $\mathbf{R}$ (on pourra écrire la fonction comme somme de deux fonctions).

Exercise 4 On considère l'équation différentielle

$$u' + 2u = te^t. \qquad (E)$$

1) Ecrire et résoudre l'équation homogène associée.

2) Chercher une solution particulière $u_0(t)$ de (E) sous la forme $u_0(t) = (at+b)e^t$.

3) Donner les solutions de l'équation (E).

4) En utilisant la méthode de variation de la constante, trouver les solutions de l'équation

$$u' + 2u = e^t.$$

CHB4, CC3

Ex.1.

a) Rappeler la formule pour $\int x^\alpha dx$ suivant les valeurs de α.
b) En déduire (a l'aide de changements de variable simples)

$$\int \frac{1}{2x+1}dx,\ \int \frac{1}{(3x+2)^3}dx, \int \frac{8x}{(2x^2+3)^3}dx$$

Ex.2.

1) Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx,\ \int 2x\arctan(x)dx,\ \int \frac{1}{\tan x}dx$$

2) a) décomposer la fraction rationnelle $\frac{t+1}{t(2t-1)}$ sous la forme $\frac{a}{t}+\frac{b}{2t-1}$ puis calculer la primitive $\int \frac{t+1}{t(2t-1)}dt$.

b) A l'aide d'un changement de variable en déduire :

$$\int \frac{\exp(t)+1}{2\exp(t)-1}dt$$

Ex.3.

a) Chercher la solution générale sur $\mathbb{R}$ de l'equation différentielle suivante :

$$y' + y = \cos t$$

(chercher une solution particulière sous la forme $y_0(t) = a\sin t + b\cos t$)
b) Chercher la solution générale sur $]-2,+\infty[$ de l'équation différentielle suivante :

$$y' + \frac{y}{t+2} = 3(t+2)$$

α)En cherchant une solution particulière évidente.
β) par méthode de variation de la constante.

Ex.4.

Résoudre :

$$y'' + 2y' + y = \sin(2t)$$

Groupe SVT 04

Controle Continu n°3

Durée 1h30. Aucun document autorisé. Calculatrices interdites.

On veillera à justifier toutes les affirmations. La notation tiendra compte de la rédaction comme de l'exactitude des solutions.

Questions de cours

Donner, avec des hypothèses aussi précises que possible, le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis.

Premier exercice

On dit qu'une fonction f est *minorée* sur l'intervalle $[a,b]$ ssi il existe une constante $m \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \geq m.$$

On dit qu'une fonction f est *majorée* sur l'intervalle $[a,b]$ ssi il existe une constante $M \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in [a,b], f(x) \leq M.$$

On dit qu'une fonction f est *bornée* sur l'intervalle $[a,b]$ ssi f est majorée *et* minorée sur $[a,b]$.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{x-5}{x+1}.$$

1. Donner le domaine de définition de f, calculer ses limites aux bornes de son domaine de définition et étudier les variations de f.
2. Montrer que f est bornée sur $[0,2]$ et calculer son maximum et son minimum.
3. Soit $I = \int_0^2 f(t)dt$. Justifier sans calculer I que $\forall x \leq 0, -10 \leq I \leq -2$.
4. Calculer I.
5. f est-elle bornée sur $]-1,0]$? Et sur $]2,+\infty[$?
6. Soit $J(x) = \int_0^x f(t)dt$, en vous aidant des questions précédentes, montrer que $\forall x \geq 0, J(x) \leq xf(x)$.
7. Montrer que
$$\lim_{x\to\infty} J(x) = +\infty.$$

Deuxième exercice

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = (1+x)e^{-2x}.$$

1. Etudier g et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$, en précisant les équations des tangentes à $\mathcal{C}_g$ aux points d'abscisse -1 et d'abscisse 0.
2. Soit $\alpha > 0$, on note D_α le domaine délimité par l'axe des ordonnées à gauche, l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}_g$ et la droite d'équation $x = \alpha$ à droite. Dessiner D_α et calculer son aire en fonction de α. Quelle est sa limite lorsque $\alpha \to \infty$?

3. Trouver des coefficients a et b réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0.$$

On dit alors que f vérifie *l'équation différentielle*

$$(ED) : u'' + au' + bu = 0.$$

4. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $g^{(k)}$ la dérivée k-ième de g. Montrer que $g^{(1)} = g'$ vérifie l'équation différentielle (ED), puis par récurrence montrer que $\forall k \geq 0$, $g^{(k)}$ vérifie l'équation différentielle (ED).

Contrôle continu3 de Mathématiques MAT111a, groupe CHB3 Licence 1

(Documents, calculatrices et téléphones interdits)

Questions de cours, ou presque...

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$, donner une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}$

2. Soit $b \in \mathbb{R}^*$ et $k \in \mathbb{R}$, donner une primitive de la fonction $x \mapsto \sin(bx+k)$

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}$ par

$$f(x) = \frac{x}{3x^2-4x+1}$$

1. Donner l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Montrer qu'il existe deux réels a, b tels que $\forall x \in \mathcal{D}_f$

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{3x-1}$$

2. En déduire F une primitive de f.

Exercice 2

Avec un changement de variable judicieux, trouver la valeur de :

$$I = \int_0^1 \sin(t)^{18} \cos(t)\, dt$$

et de

$$J = \int_1^x \frac{e^{2t}}{3e^{2t}-4e^t+1} dt.$$

Pour le calcul de J, on pourra se servir de l'exercice 1.

Exercice 3

Soit $(\mathcal{E})$ l'équation différentielle suivante :

$$(\mathcal{E}) \quad y' - y = \sin(t) - 2\cos(t) + e^{4t} + t$$

1. Ecrire $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée, puis la résoudre.

2. Trouver une solution particulière y_1 de

$$(\mathcal{E}_1) \quad y_1' - y_1 = \sin(t) - 2\cos(t);$$

puis y_2 de

$$(\mathcal{E}_2) \quad y_2' - y_2 = e^{4t};$$

puis y_3 de

$$(\mathcal{E}_3) \quad y_3' - y_3 = t.$$

3.En déduire une solution particulière de $\mathcal{E}$

4. Conclure en donnant la solution générale de $(\mathcal{E})$.

Université Joseph Fourier (Grenoble I)
Année universitaire 2008/2009

MAT111b, Contrôle Continu no. 3 (durée : 1h15)
Groupe BIOL-7, lundi 15 décembre 2008

Barème indicatif : *exercice 1 : 8 pts; exercice 2 : 2 pts; exercice 3: 4 points; exercice 4 : 6 pts.*

Les exercices sont indépendants.

Documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1. Calculer les intégrales :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{(t+2)(t+3)}dx, \quad J = \int_0^{\pi/2} x\cos(2x)dx, \quad K = \int_0^{3\pi} \frac{1}{6+4x^2}dx$$

Exercice 2. Au moyen d'un changement de variable et du calcul de l'intégral I ci-dessus, déduire :

$$\int \frac{e^t}{(e^t-2)(e^t+3)}dt.$$

Exercice 3. Résoudre, sur un intervalle qu'on précisera, l'équation différentielle $u' = 2tu + te^{t(t+1)}$.

Exercice 4. Soit l'équation différentielle

$$(E) \quad u'' + u' - 6u = t^2 + 3.$$

1. Résoudre (E).
2. *(Bonus)* Ecrire le système différentiel d'ordre 1 associé à (E).

MAT 111 B Contrôle Continu 3
11/12/2008 Université Grenoble 1

Documents, calculatrices, téléphones portables interdits.
JUSTIFIER VOS RÉPONSES! SOIGNER LA RÉDACTION!

1. Questions de cours.
   (a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle ouvert I. Donner la définition d'une primitive de f sur I.
   (b) Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de taille $n \times n$ et soit λ une valeur propre de A. Donner la définition d'un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
   (c) Donner la dérivée des fonctions $x \mapsto \tan x$ et $x \mapsto \arctan(x)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x-3}{(x-1)(x+1)}$.
   (a) Donner le domaine de définition de f.
   (b) Donner le tableau de variations de f sur l'intervalle $I = [-6, -1[$ et déterminer $f(I)$.
   (c) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse $x = -2$.
   (d) Donner l'aire de la zone délimitée par les droites $x = 2$, $x = 6$, l'axe des abscisses et la courbe représentative de f.
   Indication : on décomposera f sous la forme $f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Déterminer les primitives des fonctions suivantes sur l'intervalle I associé:
   (a) $f(x) = \frac{4x-6}{x^2-3x+18}$, $I = [0, 1]$
   (b) $f(x) = \sin(x)(2\cos(x) + 7)^{11}$, $I = \mathbb{R}$
   (c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2+x+1}$, $I = \mathbb{R}$
   (d) $f(x) = x \ln x$, $I = [1, 2]$ (on utilisera une intégration par parties)
   (e) $f(x) = 3x^2 \sin(x^3)$, $I = [1, +\infty)$ (on utilisera un changement de variables)
   (f) $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$ $I = [1, +\infty)$.

4. On considère l'équation différentielle suivante:
$$(E) : \; u'(t) - 2u(t) = t + 1.$$
   (a) Donner l'équation homogène (E') associée à (E). Donner toutes les solutions de (E').
   (b) Chercher une solution particulière de (E) sous la forme $u(t) = at + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.
   (c) Donner toutes les solutions de (E).
   (d) On veut maintenant résoudre l'équation différentielle
$$(E_1) : \; u'(t) - 2u(t) = 4e^{2t}.$$
   Trouver une solution particulière de (E_1) en utilisant la méthode de variation de la constante.
   (e) Donner toutes les solutions de l'équation
$$(E_2) : \; u'(t) - 2u(t) = 4e^{2t} + t + 1.$$
   (f) Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie $u(0) = 0$.