UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 6

Exercice 1. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la forme différentielle

$$\omega \;=\; (1 - x^2y^2)dx - 2x^3ydy \;.$$

(a) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

(b) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale de la forme ω du point $P_0 = (0,0)$ au point $P_1 = (1,1)$ le long de la courbe $y = ax + (1-a)x^2$. Le résultat dépend-il du paramètre a ?

(c) Soit $\mu : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$\mu(x,y) = \frac{1}{(1+x^2y^2)^2} \;, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;.$$

Vérifier que μ est un facteur intégrant pour la forme ω, c'est-à-dire que la nouvelle forme $\Omega = \mu\omega$ est exacte. Trouver une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\Omega = dV$.

(d) Dessiner dans le plan $\mathbb{R}^2$ les lignes de niveau de la fonction V.

(e) Trouver la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) \;=\; \frac{1 - x^2y(x)^2}{2x^3y(x)}$$

vérifiant la condition initiale $y(2) = 1/2$.

Exercice 2. Soit le système $\quad (\mathrm{S})\begin{cases} x'(t) & = y^2(t) - 1 \\ y'(t) & = x^2(t) - 1 \end{cases}$

a) Déterminer les solutions stationnaires du système.

b) Montrer que $f(x,y) = (x^3 - y^3) - 3(x-y)$ est une intégrale première du mouvement.

c) Tracer les courbes solutions de condition initiale $x(0) = y(0) = 0$ et $x(0) = \sqrt{3}, y(0) = 0$.

Exercice 3. L'objet de cet exercice est l'étude de la tractrice (T) donnée par $\begin{cases} x(t) = & t - \mathrm{th}\ (t) \\ y(t) = & 1/\mathrm{ch}\ (t) \end{cases}$

1) Expliquer pourquoi il suffit d'étudier la courbe sur $[0, +\infty[$.

2) Dresser le tableau de variations de (T).

3) Déterminer un vecteur tangent à (T) en $t = 0$.

4) Montrer que (T) admet en $+\infty$ et $-\infty$ une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

5) Calculer la longueur de la courbe entre les points $t = 0$ et $t = a$, $a > 0$.

6) Calculer la courbure signée $k(t)$.

7) Montrer que la développée de la courbe est la chaînette (C) d'équation cartésienne $y = \mathrm{ch}\ (x)$.

8) Tracer sur un même dessin les courbes (T) et (C).

Exercice 4. Soit une courbe $\gamma(x) = (x, y(x))$ définie sur $[a,b]$ et vérifiant $y(x) > 0$. On note

$$L_h(\gamma) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{y} dx$$

la longueur hyperbolique de γ. Soit les points $A = (a,1)$ et $B = (b,1)$. On cherche parmi les courbes γ allant de A à B ($\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$) celle de longueur hyperbolique minimum.

1) En appliquant l'équation d'Euler-Lagrange, montrer qu'une telle courbe satisfait l'équation différentielle

$$(E_c)\; y^2(1+y'^2) = c^2$$

où c est une constante non nulle.

2) Résoudre (E_c). Quelle est la nature géométrique de la courbe minimisante ?

Examen du 9 janvier 2012 de 14h à 16h

Calculettes, documents et portable interdits. Une feuille A4 recto-verso de résumé de cours autorisée. Le barème n'est qu'indicatif de l'importance relative des exercices.

Exercice 1 (12 pts) Soit la courbe C paramétrée $t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ avec $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = 3t^2 + 1 \end{cases}$

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$ puis $x'^2(t) + y'^2(t)$. En déduire :

a) La régularité de la courbe C (c.à.d. C n'a pas de point singulier).

b) La longueur d'arc L entre les points de paramètre 0 et 1.

c) Le repère de Frenet $(\vec{t}(t), \vec{n}(t))$ de C au point $M(t)$ et l'angle θ de $\vec{t}(t)$ avec Ox en fonction de $\arctan t$.

2) Calculer $x''(t)$ et $y''(t)$ puis la courbure signée $\kappa(t)$ et le rayon de courbure signé $\rho(t)$. Vérifier que C a un sommet et donner le rayon de courbure en ce point.

3) Montrer que la développée de C est la courbe D paramétrée par $t \in \mathbb{R} \mapsto O(t) = \left(4t^3, -\frac{3}{2}t^4 + 3t^2 + \frac{5}{2}\right)$.

4) Déterminer le point singulier de la courbe D et sa nature (on a le choix ici entre le calcul ou une application d'un résultat du cours qui l'évite).

5) Quelle symétrie présente les courbes C et D ? Dresser un tableau de variation pour C sur $[0, +\infty[$. Tracer succinctement C et D sur un même graphique.

Exercice 2 (*les parties A et B peuvent être abordées indépendamment*)

A (3 pts) Soit l'équation différentielle linéaire (qui est aussi à variables séparées) définie pour $x > 0$

$$(E) \quad y'(x) \; = \; -\frac{(2x+1)y(x)}{2x(x+1)}$$

Déterminer la solution $y(x)$ de (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

B (9 pts) On considère la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^2$

$$\omega \; = \; (2x+1)y dx + 2x(x+1) dy \; .$$

(a) La forme ω est-elle fermée ? exacte ?

(b) Calculer l'intégrale de la forme ω du point $A = (0,0)$ au point $B = (1,0)$ le long des deux chemins suivants :

$$\begin{cases} \gamma_1 & = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = 0 \,, \; 0 \leq x \leq 1\} \; , \\ \gamma_2 & = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = x - x^2 \,, \; 0 \leq x \leq 1\} \; . \end{cases}$$

Le résultat est-il le même pour les deux chemins ? Que retrouve-t-on ?

Dans ce qui suit, *on restreint la forme* ω *au domaine* $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$.

(c) Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $f(x,y) = y$. Vérifier que f est un facteur intégrant pour la forme ω, c'est-à-dire que la nouvelle forme $\tilde{\omega} = f\omega$ est exacte. Trouver une fonction $U : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\omega} = dU$.

(d) Décrire les courbes intégrales de ω.

(e) Retrouver pour $x > 0$ la solution de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $y(1) = 1$.

Exercice 3 (3 pts) Soit un nombre a fixé avec $0 \leq a < 1$.

On cherche parmi les fonctions $y(t)$ de classe C^2 définies sur $[a, 1]$ et telles que $y(a) = \sqrt{a}$ et $y(1) = 1$ une fonction $y_0(t)$ rendant l'intégrale $I = \int_a^1 \sqrt{1 + y^2 y'^2} \, dt$ minimale.

1) A l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange montrer que la seule fonction possible est $y_0(t) = \sqrt{t}$.

2) Qu'en déduit-on dans le cas où $a = 0$?

3) Si $a \neq 0$, en considérant les courbes $t \in [a, 1] \mapsto \left(t, \frac{y^2(t)}{2}\right)$, montrer que la fonction $y_0(t) = \sqrt{t}$ rend bien l'intégrale I minimale.

***