**UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 4**

**Exercice 1**. Résoudre les équations différentielles suivantes et discuter le comportement asymtotique des solutions ($\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$)

$$a) \quad x' = \lambda x, \quad b) \quad x' = x - \frac{t^n}{n!}, \quad c) \quad x' = at^n x, \quad d) \quad x' = -x + e^t.$$

**Exercice 2**. On considère sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$(E) \qquad x - tx' = \frac{2t}{t+2}.$$

Pour tout $t \in ]0, +\infty[$, on définit $F(t) = f(t)/t$.

1. Montrer que $f$ est solution de $(E)$ si et seulement si $F'(t) = \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t}$ pour tout $t \in ]0, +\infty[$.
2. En déduire les solutions de $(E)$.
3. Généraliser cet exemple pour résoudre une équation différentielle de la forme $x - tx' = -t^2 h(t)$.

**Exercice 3**. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'espace vectoriel des polynômes $V = \mathbb{R}_n[t]$ de degré $\leq n$.

(a) Montrer que l'application $L : V \to V$, $P \mapsto P' - P$ définit une bijection de $V$ dans $V$. Déterminer l'application réciproque $L^{-1}$.

(b) Soit $P$ un polynôme. Déterminer une primitive de $f(t) = P(t)e^{-t}$.

**Exercice 4**.

(a) Résoudre l'équation différentielle suivante

$$x' = x + t + 2 \ ; \ x(0) = 1.$$

(b) Tracer la solution et étudier le comportement de la solution en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) Trouver le point où la solution atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ et donner la valeur de ce minimum.

**Exercice 5**. Équations différentielles à variables séparées : résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(2t+3)x' + tx = 0 \ ; \ x(0) = 1.$$

**Exercice 6**.

1. La désintégration de 50 % de matière radioactive s'est produite dans 30 jours. Dans combien de temps restera-t-il 1 % de toute la quantité initiale ?
2. Selon les expériences, la désintégration annuelle du radium est de l'ordre 0,44 mg par gramme. En combien d'années la moitié de toute la réserve de radium se désintègrera-t-elle ?

**Exercice 7**.

(a) Résoudre l'équation différentielle $x' = (x-a)(x-b)$ sur $\mathbb{R}$ avec des constantes $a \neq b$ en utilisant la méthode de séparation des variables.

(b) Résoudre l'équation différentielle $x' = x^2 + a$ sur $\mathbb{R}$.

(c) Résoudre l'équation différentielle $x' = x^2 - 10x + 9$ sur $\mathbb{R}$ avec la condition initiale $x(0) = 3$. (*réponse* : $x(t) = \frac{3\,(-e^{8t} - 3)}{-3\,e^{8t} - 1}$)

**Exercice 8**. On considère les deux équations différentielles dépendant de deux paramètres réels $a$ et $b$

$$(E_1) \quad x' = ax + b$$
$$(E_2) \quad x' = ax + bx^2.$$

Pour chacune d'elles

1. Déterminer les solutions stationnaires.
2. Résoudre l'équation analytiquement et donner l'allure des solutions.

⁂