UJF 2012-13 Mat237 Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Montrer que le cercle défini comme la courbe paramétrée $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ n'est pas le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de réels.

Exercice 2. a) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ donnée par l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Donner une infinité de paramétrages différents de D.

b) Paramétrer une ellipse, une hyperbole et une parabole dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Déterminer une équation cartésienne de la droite passant par $(1, 2)$ et perpendiculaire à la droite paramétrée $x(t) = x_0 + at$, $y(t) = y_0 + bt$. En donner une représentation paramétrique.

Exercice 4 Soit la courbe plane Γ donnée par $f(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{t^2}{1+t}, \frac{t^3}{1+t})$ où le paramètre t décrit $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$. Déterminer les points singuliers de Γ et leur nature.

b) Etudier les branches infinies de Γ (il y a une asymptote).

c) Etudier la convexité de Γ en considérant les variations de $g(t) = y'(t)/x'(t)$.

d) Dresser un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.

e) Tracer la courbe Γ.

Exercice 5. Etude de L la courbe de Lissajous paramétrée par $x(t) = \sin t$ et $y(t) = \cos 3t$.

a) Donner les symétries qui permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0, \pi/2]$.

b) Dresser sur $[0, \pi/2]$ un tableau de variation commun de $x(t)$ et $y(t)$.

c) Etudier sur $[0, \pi/2]$ la convexité de L en considérant les variations de $g(t) = y'(t)/x'(t)$.

d) Déterminer la tangente en L en $t = \pi/4$.

e) A l'aide de tout ceci, tracer la courbe L.

Exercice 6. Une conique C d'excentricité $e > 0$ de foyer l'origine O du plan et de directrice D la droite d'équation $y = d > 0$ est l'ensemble des points M vérifiant $OM = ed(M, D)$ où $d(M, D)$ est la distance du point M à la droite D.

a) Montrer que l'équation polaire de C est $r(\theta) = \dfrac{ed}{1 + e\cos(\theta)}$

b) En déduire que C est une ellipse $\iff e < 1$.

c) Dans quel cas C est-t'elle une parabole ?

Exercice 7. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et γ un cercle de rayon $1/n$ qui roule sans glisser à l'intérieur du cercle unité C. On fixe un point M du cercle mobile γ, il décrit dans le mouvement une courbe. On prend comme paramètre l'angle polaire $\theta \in \mathbb{R}$ du point de contact $H(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ du cercle mobile γ avec le cercle fixe C. On suppose que $M(0) = H(0) = (1, 0)$.

a) Calculer les coordonnées du centre $I(\theta)$ de γ au temps θ.

b) Montrer que l'angle $\widehat{M(\theta)H(\theta)}$ est $n\theta$.

c) Trouver les coordonnées de $M(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$.

[Résultat : $x(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\cos\theta + \cos(n-1)\theta)$, $y(\theta) = \frac{1}{n}((n-1)\sin\theta - \sin(n-1)\theta)$]

Exercice 8. Soit la courbe plane paramétrée par $x(t) = t + \frac{1}{t}$, $y(t) = t - \frac{1}{t}$ pour $t > 0$. Montrer que, par changement de paramètre, cette courbe se transforme en $x(t) = 2\mathrm{ch}s$, $y(t) = 2\mathrm{sh}s$.

Exercice 9. Soit $M(t) = (x(t), y(t))$ une courbe paramétrée continue telle que la fonction $t \to x(t)$ est injective. Montrer que cette courbe est le graphe d'une fonction scalaire.